NOI 2025 Day2 B. 集合

朱剑枫

2025 年 7 月 16 日

问题（集合）

- 给定长度为 2^n 的序列 a。
- 定义 $f(S)$ 为集合 S 内所有数的按位与。
- 从 $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ 中选出两个不交集合 P, Q，满足 $f(P) = f(Q)$。
- 求所有选择方案的 $\prod_{i \in P \cup Q} a_i$ 之和，答案对 998244353 取模。

数据范围：$n \leq 20$。

- 以下记 $U = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$。

- 以下记 $U = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$。
- 对一个 $S \subseteq U$，记 $w(S) = \prod_{i \in S} a_i$。

- 以下记 $U = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$。
- 对一个 $S \subseteq U$，记 $w(S) = \prod_{i \in S} a_i$。
- 以下将二进制数也视作集合，即 $f(S) \subseteq \{0, 1, \ldots, n-1\}$。

$n \le 8$

$n \le 8$

- 令 $dp_{i,j,k}$ 为前 i 个数，$f(P)=j$，$f(Q)=k$ 的所有方案权值和。

$n \le 8$

- 令 $dp_{i,j,k}$ 为前 i 个数，$f(P) = j$，$f(Q) = k$ 的所有方案权值和。
- 时间复杂度 $O(8^n)$，期望得分：16。

$n \leq 10$

$n \le 10$

- 类似高维前缀和，指定一个前缀：令 $dp_{i,j,k}$ 为二进制前缀为 i，$f(P)=j$，$f(Q)=k$ 的所有方案权值和。

$n \leq 10$

- 类似高维前缀和，指定一个前缀：令 $dp_{i,j,k}$ 为二进制前缀为 i，$f(P) = j$，$f(Q) = k$ 的所有方案权值和。
- 对于一个前缀 i，dp_i 的转移为 dp_{i0} 和 dp_{i1} 的二维按位与卷积。

$n \leq 10$

- 类似高维前缀和，指定一个前缀：令 $dp_{i,j,k}$ 为二进制前缀为 i，$f(P) = j$，$f(Q) = k$ 的所有方案权值和。
- 对于一个前缀 i，dp_i 的转移为 dp_{i0} 和 dp_{i1} 的二维按位与卷积。
- 时间复杂度 $O(n4^n)$，由于常数较大无法通过 $n \leq 12$，期望得分：24。

$n \le 12$

$n \leq 12$

- 直接求出 $s_{i,j}$ 表示 $i \subseteq f(P)$，$j \subseteq f(Q)$ 的权值之和。

$n \leq 12$

- 直接求出 $s_{i,j}$ 表示 $i \subseteq f(P)$，$j \subseteq f(Q)$ 的权值之和。
- 对于每个 a_i，可以选择放到 P 或者 Q 或者不放，然后求一次后缀积。

$n \le 12$

- 直接求出 $s_{i,j}$ 表示 $i \subseteq f(P)$，$j \subseteq f(Q)$ 的权值之和。
- 对于每个 a_i，可以选择放到 P 或者 Q 或者不放，然后求一次后缀积。
- 求出 $s_{i,j}$ 后再做高维后缀减即可。

$n \leq 12$

- 直接求出 $s_{i,j}$ 表示 $i \subseteq f(P)$，$j \subseteq f(Q)$ 的权值之和。
- 对于每个 a_i，可以选择放到 P 或者 Q 或者不放，然后求一次后缀积。
- 求出 $s_{i,j}$ 后再做高维后缀减即可。
- 时间复杂度 $O(n4^n)$，期望得分：36。

- 利用 FWT 与 IFWT，原题意即求

$$\frac{1}{2^n}\sum_{P,Q\subseteq U,\ P\cap Q=\varnothing} w(P)w(Q)\sum_{s\subseteq\{0,1,\dots,n-1\}}(-1)^{|s\cap f(P)|+|s\cap f(Q)|}.$$

- 利用 FWT 与 IFWT，原题意即求

$$\frac{1}{2^n}\sum_{P,Q\subseteq U,\ P\cap Q=\varnothing} w(P)w(Q)\sum_{s\subseteq\{0,1,\dots,n-1\}}(-1)^{|s\cap f(P)|+|s\cap f(Q)|}.$$

- 忽略常数项，对 $s\cap f(P)$ 与 $s\cap f(Q)$ 容斥，有原式等于

$$\sum_{s\subseteq\{0,1,\dots,n-1\}}\sum_{s_1,s_2\subseteq s}(-2)^{|s_1|+|s_2|}\sum_{s_1\subseteq f(P),\ s_2\subseteq f(Q),\ P\cap Q=\varnothing} w(P)w(Q).$$

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1 \subseteq f(P),\ s_2 \subseteq f(Q),\ P \cap Q = \varnothing} w(P)w(Q)$。

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1\subseteq f(P),\ s_2\subseteq f(Q),\ P\cap Q=\varnothing} w(P)w(Q)$。
- 对于每个 $i \in U$:

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1 \subseteq f(P),\ s_2 \subseteq f(Q),\ P \cap Q = \varnothing} w(P)w(Q)$。
- 对于每个 $i \in U$:
  - 若 $s_1 \subseteq i$ 且 $s_2 \not\subseteq i$,则 i 可以被分到 P 里;

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1 \subseteq f(P),\ s_2 \subseteq f(Q),\ P \cap Q = \varnothing} w(P)w(Q)$。
- 对于每个 $i \in U$:
  - 若 $s_1 \subseteq i$ 且 $s_2 \not\subseteq i$，则 i 可以被分到 P 里;
  - 若 $s_1 \not\subseteq i$ 且 $s_2 \subseteq i$，则 i 可以被分到 Q 里;

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1 \subseteq f(P),\ s_2 \subseteq f(Q),\ P \cap Q = \varnothing} w(P)w(Q)$。
- 对于每个 $i \in U$：
  - 若 $s_1 \subseteq i$ 且 $s_2 \not\subseteq i$，则 i 可以被分到 P 里；
  - 若 $s_1 \not\subseteq i$ 且 $s_2 \subseteq i$，则 i 可以被分到 Q 里；
  - 若 $s_1 \cup s_2 \subseteq i$，则 i 既可以被分到 P 里也可以被分到 Q 里。

- 先只考虑计算 $\sum_{s_1\subseteq f(P),\ s_2\subseteq f(Q),\ P\cap Q=\varnothing} w(P)w(Q)$。
- 对于每个 $i\in U$:
  - 若 $s_1\subseteq i$ 且 $s_2\not\subseteq i$，则 i 可以被分到 P 里;
  - 若 $s_1\not\subseteq i$ 且 $s_2\subseteq i$，则 i 可以被分到 Q 里;
  - 若 $s_1\cup s_2\subseteq i$，则 i 既可以被分到 P 里也可以被分到 Q 里。
- 因此上式等于

$$\prod_{s_1\subseteq i,\ s_2\not\subseteq i}(1+a_i)\prod_{s_1\not\subseteq i,\ s_2\subseteq i}(1+a_i)\prod_{s_1\cup s_2\subseteq a_i}(1+2a_i).$$

特殊性质 B： $a_i \neq -1$

特殊性质 B： $a_i \neq -1$

- 由于

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) = \frac{\prod_{s_1 \subseteq i} (1 + a_i)}{\prod_{s_1 \cup s_2 \subseteq i} (1 + a_i)},$$

因此当 $a_i \neq -1$ 时，原式可以直接由 s_1 与 s_2 或卷积得到。

特殊性质 B：$a_i \neq -1$

- 由于
$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1+a_i) = \frac{\prod_{s_1 \subseteq i}(1+a_i)}{\prod_{s_1 \cup s_2 \subseteq i}(1+a_i)},$$
因此当 $a_i \neq -1$ 时，原式可以直接由 s_1 与 s_2 或卷积得到。
- 时间复杂度 $O(n2^n)$，结合 $n \le 12$ 的部分后，期望得分：68。

- 对于 $a_i = -1$ 的情况，考虑

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) \prod_{s_1 \not\subseteq i,\ s_2 \subseteq i} (1 + a_i)$$

中零因子的位置。

- 对于 $a_i = -1$ 的情况，考虑

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) \prod_{s_1 \not\subseteq i,\ s_2 \subseteq i} (1 + a_i)$$

  中零因子的位置。
- 上式非 0 仅当包含 s_1 和 s_2 的零因子都被包含在 $s_1 \cup s_2$ 中。

- 对于 $a_i = -1$ 的情况，考虑

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) \prod_{s_1 \not\subseteq i,\ s_2 \subseteq i} (1 + a_i)$$

  中零因子的位置。
- 上式非 0 仅当包含 s_1 和 s_2 的零因子都被包含在 $s_1 \cup s_2$ 中。
- 考虑对每个 s' 记录 $\prod_{s' \subseteq i}(1 + a_i)$ 中零因子个数 $c_{s'}$。

- 对于 $a_i = -1$ 的情况，考虑

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) \prod_{s_1 \not\subseteq i,\ s_2 \subseteq i} (1 + a_i)$$

  中零因子的位置。
- 上式非 0 仅当包含 s_1 和 s_2 的零因子都被包含在 $s_1 \cup s_2$ 中。
- 考虑对每个 s' 记录 $\prod_{s' \subseteq i}(1 + a_i)$ 中零因子个数 $c_{s'}$。
- 在或卷积转移时，只转移零因子个数相等位置即可。

- 对于 $a_i = -1$ 的情况，考虑

$$\prod_{s_1 \subseteq i,\ s_2 \not\subseteq i} (1 + a_i) \prod_{s_1 \not\subseteq i,\ s_2 \subseteq i} (1 + a_i)$$

  中零因子的位置。
- 上式非 0 仅当包含 s_1 和 s_2 的零因子都被包含在 $s_1 \cup s_2$ 中。
- 考虑对每个 s' 记录 $\prod_{s' \subseteq i}(1 + a_i)$ 中零因子个数 $c_{s'}$。
- 在或卷积转移时，只转移零因子个数相等位置即可。
- 时间复杂度 $O(n2^n)$，期望得分：100。