

《一棵树》解题报告

周雨扬

北京大学

2021年5月14日

题目大意

给一颗 n 个节点的树，树的边权均为 1。

选择树上的 k 条边将其删除后，再添加 k 条边使得其形成一棵树。

对于所有的合法方案，计算所有无序点对的距离和，答案对 998244353 取模。

两个方案不同当且仅当删的边不同，或者是加的边不同。

$$1 \leq n \leq 10^5, 0 \leq k \leq 1$$

算法 0

$k = 0$ 是签到题。

对于每一条边，计算最短路上出现的次数即可。

时间复杂度 $O(n)$

算法 1

$k = 1$ 差不多也是签到题。

考虑对于割掉每条边之后，对于答案的贡献。

此时贡献可以分成如下两个部分。

- 割开边形成两个连通块内部贡献。
- 割开边形成两个连通块之间的贡献。

算法 1.1

内部的贡献可以通过两次 dfs 算出。具体做法由于非常经典，此处略去。

假设两个连通块大小分别为 $a, n - a$ 。则总共合法的加边方案为 $a(n - a)$ ，每个方案都会更新一次。

时间复杂度 $O(n)$ 。

算法 1.2

两个连通块之间的贡献可以将其分成两个块内，以及跨越两个连通块的方案数。

跨越两个连通块的贡献 $a^2(n - a)^2$ 。

算法 1.2

两个连通块之间的贡献可以将其分成两个块内，以及跨越两个连通块的方案数。

跨越两个连通块的贡献 $a^2(n - a)^2$ 。

在考虑连通块内的贡献的时候，考虑固定加的一条边在另一个连通块的端点，同时固定路径在另一个连通块的端点。

随着这个连通块端点的移动，我们会将这个连通块所有有序点对距离都恰好更新一次答案。

算法 1.2

两个连通块之间的贡献可以将其分成两个块内，以及跨越两个连通块的方案数。

跨越两个连通块的贡献 $a^2(n - a)^2$ 。

在考虑连通块内的贡献的时候，考虑固定加的一条边在另一个连通块的端点，同时固定路径在另一个连通块的端点。

随着这个连通块端点的移动，我们会将这个连通块所有有序点对距离都恰好更新一次答案。

利用上面计算的结果我们也可以计算出这部分的贡献。