

# 统计学家

---

清华大学  
交叉信息研究院  
冯齐纬

# 题目

- 给出  $N * M$  的整数矩阵，回答  $K$  个询问
- 每次询问一个子矩阵内的 逆序对 个数
- 逆序对定义为满足  $A[x_1, y_1] > A[x_2, y_2]$  的四元组  $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ 
  - $x_1 \leq x_2$
  - $y_1 \leq y_2$
- 提交答案题 ~

# 得分情况

- \\TODO

## $\alpha$ 类测试点

- *rev1.in*:  $N = 1, M = 100000, K = 300000$
- *rev2.in*:  $N = 500000, M = 1, K = 500000$
- *rev3.in*:  $N = 2, M = 200000, K = 500000$
- *rev4.in*:  $N = 200000, M = 3, K = 500000$
- *rev5.in*:  $N = 5, M = 200000, K = 1000000$
- 得分情况：
  - //TODO

## $\alpha$ 类测试点

- 数据狭长
- $N, M$  对称——不妨只考虑  $N$  很小,  $M$  很大的情况
- 枚举两行, 问题转化成:
  - 给定长度为  $M$  的序列  $A$  和  $B$ , 对每个询问  $(L_i, R_i)$ , 求  $(i, j)$  个数, 满足  $L_i \leq i < j \leq R_i, A[i] > B[j]$

## $\alpha$ 类测试点

- 将所有询问按右端点 $R_i$ 排序
- 扫描 $j = 1..M$ ，维护即时的 $rev[1..j, j]$ 即可回答询问
- 须维护 $r[1..M]$ ，支持：
  - $add(K)$ :  $\forall i \in [1, j]$ 满足 $A[i] \geq K$ ，令 $r[i] += 1$
  - $query(i)$ : 询问 $\sum_{k=i}^j r[k]$
- 直接实现： $O(M^2)$

## $\alpha$ 类测试点

- 分块实现
  - 效率  $O(M\sqrt{M} \log M)$
  - 总效率  $O(N^2(M\sqrt{M} \log M + K \log K))$
- 莫队算法
  - 效率  $O(M\sqrt{M} \log M)$

## $\beta$ 类测试点

- *rev6.in*:  $N = M = 1000, K = 1000000$
- 满足  $A[x, y] < \min\{A[x - 1, y], A[x, y - 1]\}$
- 得分情况：
  - \ \ TODO

## $\beta$ 类测试点

- 任意满足  $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq N, 1 \leq y_1 \leq y_2 \leq M$  的均为逆序对
  - 除非  $x_1 = x_2 \ \&\& \ y_1 = y_2$
- 逆序对数只跟  $u_2 - u_1 + 1$  和  $v_2 - v_1 + 1$  有关
- $n = u_2 - u_1 + 1, m = v_2 - v_1 + 1$
- $c = \frac{n(n+1)}{2}, d = \frac{m(m+1)}{2}$
- $Ans = c * d - n * m$

## $\beta$ 2类测试点

- *rev7.in*:  $N = M = 1000, K = 1000000$
- 间隔形矩阵:  $A[i, j] = (i + j) \bmod 2$
- 得分情况
  - \\ TODO

## $\beta 2$ 类测试点

- 递推计算
- $c_x[n, m]$ : 左上角是  $x$  的  $n * m$  间隔形矩阵的 0 的个数
- $f_x[n, m]$ : 左上角是  $x$  的  $n * m$  间隔形矩阵的逆序对个数
  - $f_1[n, m] = c_x[n, m] + f_0[n - 1, m] + f_0[n, m - 1] - f_1[n - 1, m - 1]$
  - $f_0[n, m] = f_1[n - 1, m] + f_1[n, m - 1] - f_0[n - 1, m - 1]$

## $\gamma$ 类测试点

- *rev8.in*:  $N = 567, M = 456, K = 234567$
- *rev9.in*:  $N = 987, M = 321, K = 345678$
- 所有询问  $(u_1, v_1, u_2, v_2)$  满足  $u_1 = 1, u_2 = N$
- 得分情况：
  - \ \ TODO

## $\gamma$ 类测试点

- 统计所有  $t[i, j]$  表示第  $i$  列与第  $j$  列的逆序对个数
  - $O(M^2 N \log N)$
- 记  $rev[i, j]$  表示第  $i$  列与第  $j$  列围成的子矩阵内的逆序对个数
  - $rev[i, j] = rev[i, j - 1] + t[i, j]$
  - $O(M^2)$
- 可以  $O(1)$  回答每个询问

## $\delta$ 类测试点

- *rev10.in*:  $N = M = 80, K = 2000000$
- 随机数据
- 得分情况：
  - \\\TODO

## $\delta$ 类测试点

- $a[x_1, y_1, x_2, y_2] = \begin{cases} 1, & A[x_1, y_1] > A[x_2, y_2] \\ 0, & ELSE \end{cases}$
- $b[x_1, y_1, x_2, y_2]$ : 从 $(x_1, y_1)$ 出发的子矩阵内的逆序对个数
  - $b[x_1, y_1, x_2, y_2] = b[x_1, y_1, x_2 - 1, y_2] + b[x_1, y_1, x_2, y_2 - 1] - b[x_1, y_1, x_2 - 1, y_2 - 1] + a[x_1, y_1, x_2, y_2]$
- $c[x_1, y_1, x_2, y_2]$ : 子矩阵内的逆序对个数
  - $c[x_1, y_1, x_2, y_2] = c[x_1 + 1, y_1, x_2, y_2] + c[x_1, y_1 + 1, x_2, y_2] - c[x_1 + 1, y_1 + 1, x_2, y_2] + b[x_1, y_1, x_2, y_2]$

谢谢！