CTT2023 solutions

Zayin

2023 年 12 月 5 日

D4T1. 新居规划

- 题意：给定 m 个位置（环形排列），以及 n 个人，对于 i 来说：
  - 如果 i 没有被安排位置，那么他的价值是 0
  - 如果 i 被安排了位置，那么他的价值是 a_i
  - 如果 i 被安排了位置且其拥有邻居（即存在一个相邻位置也被安排了人），那么他的价值额外加 b_i（也即总价值为 $a_i + b_i$

  我们需要给出一种安排，使得所有队伍的总价值和最大。
- a_i, b_i 可以是负数。

$n \leq 15, 20$

- 若最后 x 个人安排了位置没有邻居，y 个人安排了位置且有邻居，则需要满足 $2x + y + [x > 0] \leq m$。
- 显然只与 x 和 y 有关，和具体的分配无关；
- 直接 $O(3^n)/O(n \times 2^n)$ 枚举每个人属于哪种情况，注意 $y! = 1$ 即可；
- 期望得分 $5 - 10pts$。

$n \leq 500$

- 所有队伍都有邻居/没有邻居是简单的，下面讨论即存在有邻居的队伍，也存在没有邻居的队伍的情况。
- 也即 $x \geq 1, y \geq 2, 2x + y + 1 \leq m$。
- 对所有队伍按照 a 从大到小排序，枚举最后一个贡献为 a 的队伍 p，则
  - $[1, p)$ 的队伍要么贡献为 a，要么贡献为 $a + b$（如果贡献 0 为意味着可以把 p 换成它，答案更优）
  - $(p, n]$ 的队伍要么贡献为 0，要么贡献为 $a + b$（因为 p 是最后一个贡献为 a 的）
- 分别枚举左边和右边贡献为 $a + b$ 的个数，则对于单边来说是个简单贪心；
- 总复杂度 $O(n^3)$，期望得分 $25pts$。

$n \le 2000$

- 枚举了左边贡献为 $a+b$ 的个数后，右边贡献为 $a+b$ 的个数可以通过双指针求解；
- 总复杂度 $O(n^2) - O(n^2 \log n)$，期望得分 $40pts$。

$n \leq 50000$

- $[1, p)$ 的队伍要么贡献为 a，要么贡献为 $a + b$;
- 可先把 $[1, p)$ 的 $a + b$ 累加起来，等价于要么贡献为 0，要么贡献为 $-b$;
- 若左边 $-b$ 的个数为 x 时的答案为 $f(x)$，打表观测 $f(x)$ 是个凸函数;
- 三分套二分求解即可，总复杂度 $O(n \log^2 n)$，期望得分 $65 - 100 pts$。

$n \leq 200000$

- 设 $[1,p)$ 的队伍中有 x 个贡献为 $-b$，$(p,n]$ 的队伍中有 y 个贡献为 $a+b$，则需要满足 $2x+(p-1-x)+y+1 \leq m$，也即 $x+y \leq m-1-i$;
- 也即可以将两边合起来看成一个贪心取 $m-1-i$ 个物品的问题;
- (这也能证明为啥 $f(x)$ 是个凸函数);
- 经典贪心，维护两个堆即可。
- 总复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 $100pts$。