《黄焖鸡》题解

北京大学 罗思远

简要题意

问有多少个每个元素都在给定的取值范围内的序列满足，每个区间的最大权独立集的权值都不等于区间和的一半。

序列长度 ≤ 200，值域 ≤ 19。

子任务	n	m	特殊性质	分数
1	≤ 10	≤ 5	无	7
2	≤ 200	≤ 3	无	3
3	≤ 200	≤ 4	$\forall 1 \le i \le n, \forall 1 \le j \le m$，都有 $j \in A_i$	5
4	≤ 200	≤ 4	无	20
5	≤ 200	≤ 5	无	10
6	≤ 200	≤ 6	无	5
7	≤ 200	≤ 7	无	10
8	≤ 200	≤ 12	无	5
9	≤ 200	≤ 16	无	15
10	≤ 200	≤ 19	无	20

分数分布

100 分：26 人
80 分：7 人
65 分：1 人
60 分：4 人
50 分：5 人
45 分：11 人
35 分：7 人
10 分：14 人
7 分：15 人

暴力

dfs 枚举所有序列，可以过程中判断每个前缀是否满足题目条件来剪枝。

因为 $m \leq 3$ 时，合法序列只有 $O(1)$ 个，所以可以通过 Subtask 1,2 获得 10 分。

分析

要计数满足某条件的序列个数，得先会判断某个序列是否合法。

本题中，我们希望每个子区间都满足条件，不妨先考虑如何判断是否每个前缀都满足条件。

这是简单的：维护 A, B, sum 分别表示最后一个元素可选可不选的 mis，最后一个元素一定不选的 mis，所有元素的和，从前往后扫描，更新 A, B, sum，如果某时刻 $2A = sum$ 就不合法。

分析

什么时候会出现 $2A = sum$ 的情况？

如果之前合法的 (A, B, sum) 加入 x 后不合法了，就是要 $2 \times \max(A, B + x) = sum + x$。

若 $x \geq A - B$，就是 $2B + 2x = sum + x$，也即 $x = sum - 2B$。

若 $x \leq A - B$，就是 $2A = sum + x$，也即 $x = 2A - sum$。

分析

设 $u = 2A - sum, v = sum - 2B$，则 $A - B = (u + v)/2$，换句话说只需要把 x 和 u, v 比较，就可以知道 x 不能取什么值。

若 $x \le (u + v)/2$，则 $x \ne u$；若 $x \ge (u + v)/2$，则 $x \ne v$。

这可以简写为：若 $u \le v$，则 $x \ne u, x \ne v$，否则无限制。

分析

而且我们发现：u, v 是封闭的（只用原来的 u, v 就可以表示出新的 u, v）。具体推导如下：

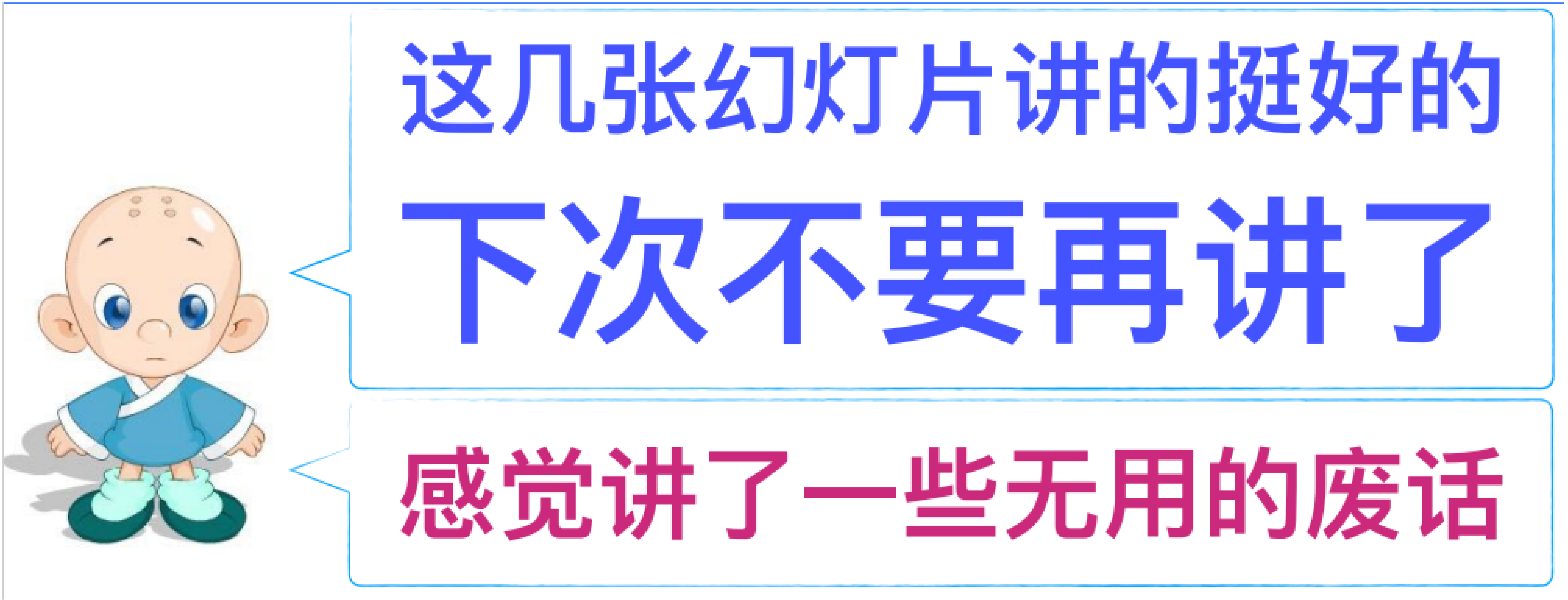
加入 x 后，$sum \to sum + x, A \to \max(A, B + x)\,, B \to A$。

$$u' = \max(2A, 2B + x) - (sum + x) = \max(2A - sum - x, 2B - sum + x)$$
$$= \max(u - x, x - v)$$
$$v' = (sum + x) - 2A = x - u$$

换句话说：$(u, v) \to (\max(u - x, x - v)\,, x - u)$

分析

耍了一些朝三暮四的小把戏之后，我们得到了一个简洁的判断方式，但还不知道它有什么用。

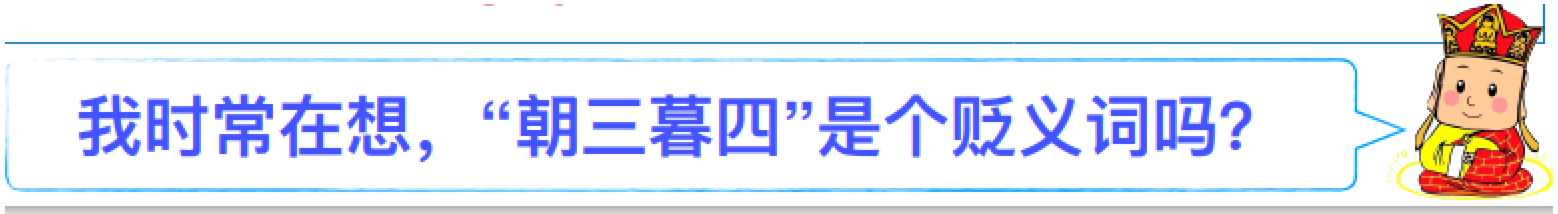


分析

但实际上 u, v 有一些显而易见的性质：

1. $(u+v)/2 \in [0, m]$（最大独立集 dp 的性质）
2. $u \geq 0$（最大独立集至少是和的一半）
3. $u \leq m$（若 $u > m$，即使后面的最大独立集恰好是一半也无法让总最大独立集变成一半）

这样，有用的 (u, v) 只有 m^2 种，所有后缀的 (u, v) 集合只有 $O(2^{m^2})$ 种（实际上 $m \leq 7$ 只有约 10^5 种），将集合设为状态进行 dp 就能得到 $40 \sim 60$ 分。



仔细分析

再分析可以得到更强的性质：$u \geq v$ 一定成立，且 $u > v$ 的状态只能转移到 $u > v$ 的状态。

证明：分类讨论 x, u, v 大小关系即可，这里略去。

而只有 $u \leq v$ 的状态才会对 x 有限制，所以最终结论是：只有 $u = v$ 的状态有用。

这样，有用的状态只有 $(1,1), (2,2), \ldots, (m, m)$ 这 m 个，集合只有 $O(2^m)$ 种，据此写一个状压 dp，朴素转移即得 $O(2^m mn)$ 做法，获得 80 分。

直接猜结论

如果要为最后的 dp 找一个跟 u, v 无关的组合意义，可以找到下面的结论：

长为 n 的序列 a 的最大独立集等于和的一半的充要条件是：设 $s_i = a_i - s_{i-1}$，则 $s_n = 0$ 且 $\forall 1 \le i < n, s_i \ge 0$。

这个条件的必要性是显然的，充分性没有那么显然（不过也可以证明）。

笔者也不清楚有没有不经过 u, v 的方法能自然地导出该结论（*自然*是指过程中不需要“猜测”）。

优化

如果在状态集合 $S=\{(a_1,a_1),\ldots,(a_k,a_k)\}$ 后面加一个 x 得到 T，根据 (u,v) 的变化方式可得，只有 $a_i<x$ 的 a_i 会对 T 有作用。

所以，如果选择合适的转移顺序（按照 x 从大到小），转移过程中做一个“超集和”，就可以把原来 $O(2^m)$ 的状态数变成 $O(2^x)$。

时间复杂度 $O(n\sum_{x\le m}2^x)=O(n2^m)$，可以获得 100 分。