CTT2023 solutions

Zayin

2023 年 12 月 4 日

D3T1. 子排列数组

- 题意：给定一个排列 a，定义 $f(i,j)$ 表示交换 $a[i],a[j]$ 后 a 的子排列数组数量，多组询问第 k 大的 $f(i,j)$。

$n \leq 500$

- 设下标数组 $p[i] = j$ 当且仅当 $a[j] = i$，则：
  - 在原数组交换两个位置和在下标数组交换两个位置是等价的
  - 原数组的一个子排列，对应于下标数组的前缀连续段
- 直接 $O(n^2)$ 枚举 i, j，可在下标数组上 $O(n)$ 统计子排列数组个数；
- 查询可 $O(\log n)$ 二分，总复杂 $O(n^3 + q \log n)$，期望得分 $5pts$。

$n \leq 2000, 10000$

- 固定 i，对于 $x \geq i$ 的前缀 $p[1...x]$ 来说：
  - 设 $p[1...x]/p[i]$ 的值域 $[l, r]$ 是已知的
  - 可以 $O(1)$ 求得 $[l, r]$ 加入什么数字后会变成连续段
- 那么从小到大枚举 j，可以通过前面的贡献 $O(1)$ 求得 $f(i, j)$；
- 即可 $O(n^2)$ 统计所有的子排列数组个数，直接排序复杂度 $O(n^2 \log n)$；
- 注意到 $f(i, j) \leq n$，开个桶统计个数即可，总复杂度 $O(n^2 + q \log n)$，期望得分 $15 - 25pts$。

$q = 1, k = 1$

- 若 $n \geq 3$，答案一定是 2，因为总能交换使得相对顺序为 $1, n, 2$，此时只有两个子排列数组 $[1]$ 和 $[1...n]$；
- 总复杂度 $O(1)$，期望得分 $5pts$。

$q = 1, k = \frac{n(n+1)}{2}$

- 固定 i，$p[1...x]/p[i]$ 的值域 $[l, r]$ 是已知的；
- 若值域 $[l, r]$ 包含 $p[i]$，那么无论怎么交换 j，$p[1...x]$ 都不可能构成一个连续段；
- 也即 $p[1...x]/p[i]$ 不包含 $p[i]$ 时，$p[1...x]$ 才对 i 可能有 1 的正贡献；
- 由于随着 x 增大，$p[1...x]$ 的值域也随之增大，有正贡献的 (i, x) 对只有 $O(n)$ 个。
- 等价于有正贡献的 (i, j) 对只有 $O(n)$ 个。

$q=1, k=\frac{n(n+1)}{2}$

- 而交换 i,j 会破坏原本的连续段 $p[1 \dots k]$ 当且仅当 $i \le k < j$。
- 由于连续段 $p[1 \dots k]$ 是不断增大的
  - 设 $prefix[x]$ 表示前缀 x 有多少个连续段
  - 那么交换 i,j 会恰好破坏 $prefix[j-1]-prefix[i-1]$ 个连续段
- 综上，可检验 $O(n)$ 个可能有正贡献的 (i,j)，即可算得最大的 $f(i,j)$；
- 总复杂度 $O(n)$，期望得分 $10pts$。

$q \leq 10$

- 二分答案 mid，统计有多少个 $f(i,j) \leq mid$。
  - 对于不可能有正贡献的，枚举 i，二分（或者直接查桶）找到最小的 j 使得 $prefix[j-1] - prefix[i-1] \geq prefix[n] - mid$
  - 对于可能有正贡献的 (i,j)，可直接 $O(n)$ 判断
- 则可 $O(n\log n)/O(n)$ 检验 mid。
- 总复杂度 $O(qn\log n)/O(qn)$，期望得分 $55pts$。

$n \le 5 \times 10^5$

- 交换 i, j 会恰好破坏 $prefix[j-1] - prefix[i-1]$ 个连续段;
- 这是一个卷积的形式;
- $O(n \log n)$ 卷起来可直接得到所有没有正贡献的 $f(i,j)$;
- 然后重新统计可能有正贡献的 $f(i,j)$ 即可;
- 总复杂度 $O((n+q)\log n)$，期望得分 $100pts$。