

# CTT2023 solutions

Zayin

2023 年 12 月 3 日

## D2T2. 天天爱下棋

- 题意：  $i$  到  $j$  有一条有向边当且仅当  $a_i \geq b_j$ ，求有向三元环个数。

$$n \leq 500$$

- 读懂题意模拟即可；
- 总复杂度  $O(n^3)$ ，期望得分 5pts。

$n \leq 2000, 5000$

- 求解任意有向图的三元环个数可做到  $m\sqrt{m}$ ;
- 此处  $m = O(n^2)$ , 可以通过 bitset 等手段降下常数;
- 总复杂度  $O(\frac{n^{2.5}}{32})$ , 期望得分 10 – 20pts。

$n \leq 20000, 50000$ 

- 枚举一个点  $u$ , 则:
  - $u$  能连向的点  $v$  满足  $a_u \geq b_v$ ;
  - 能连向  $u$  的点  $w$  满足  $a_w \geq b_u$ ;
- 若分别将点根据  $a, b$  排序, 即
  - $u$  能连向的点  $v$  是按  $b$  排序的一个前缀
  - 能连向  $u$  的点  $w$  是按  $a$  排序的一个后 (前) 缀
- 合法的  $(v, w)$  还需要保证  $a_v \geq b_w$ , 也即对于两个数组的前缀  $a'[1...x_u], b'[1...y_u]$ , 询问有多少个对  $(i, j)$  满足
  - $i \leq x_u, j \leq y_u$
  - $a'_i \geq b'_j$

$n \leq 20000, 50000$

- 也即  $O(n)$  组询问，每个询问两个数组前缀的构成的二元关系数量
- 可直接跑莫队；
- 根据实现的不同，复杂度  $O(n\sqrt{n}\log n)/O(n\sqrt{n\log n})$  不等，期望得分 30 – 55pts。

$$a_i, b_i \leq 500$$

- 直接莫队的瓶颈在于需要动态支持：
  - $O(n\sqrt{n})$  次插入删除一个数
  - $O(n\sqrt{n})$  查询小于/大于某个数的个数
- 该部分复杂度不能低于  $O(\log n)$ ;
- 但此信息可以差分, 由于值域  $w \leq 500$ , 所以可以  $O(nw)$  预处理每个前缀小于某个值的数量;
- 该部分复杂度降为  $O(1)$ , 总复杂度  $O(n\sqrt{n})$ , 期望得分 45pts.

$$n \leq 200000$$

- 这是一个经典问题，套用莫队二次离线降为
  - $O(n\sqrt{n})$  次插入删除一个数
  - $O(n)$  查询小于/大于某个数的个数
- 套用  $O(1)$  修改  $O(\sqrt{n})$  的值域分块即可；
- 总复杂度  $O(n\sqrt{n})$ ，期望得分 100pts。