

CTT 2023 D1T1 bus 题解

unzcjouhi, ltst, 朱弈恺

2023 年 12 月 2 日

题意简介

在一条公路上有 n 个乘客，第 i 个乘客的在 s_i 处等公交， t_i 处下车。公交车从位置 i 移动到位置 $i+1$ 或者 $i-1$ 需要 1 单位时间。给定初始点 p ，你要求出最少需要多少时间才能将所有乘客全部送往目的地。多组询问，每组询问的初始点 p 可能不同。

吐槽环节

算法一

对于 $n, L \leq 10$ 的测试点，我们可以使用状态压缩动态规划。状态记录哪些乘客还未上车，哪些乘客还在车上，哪些乘客已经到达目的地，以及目前车停在哪里。这样，我们得到 $O(3^n L \cdot \text{poly}(n))$ 的方法，可以通过子任务 1，获得 13 分。

算法二

这里 `ltst` 写了一个高复杂度的 dp，但我并不清楚细节。这个部分是给各种高复杂度的多项式算法过的。

写出任意一种多项式做法，可以获得 27 分。

算法三

我们先研究特殊性质 B。设所有 s_i, t_i 的最小值为 mn ，最大值为 mx 。则我们发现：公交车一定要经过 mx ，且如果经过 mx ，那么所有 $s_i < t_i$ 的乘客一定到达目的地了。假设公交车最终到达了位置 q ，那么所有 $s_i > t_i \geq q$ 的乘客也满足要求了。

接下来考虑如何处理 $s_i > t_i$ ，且 $t_i < q$ 的那些乘客。如果 $s_i > t_i$ 且 $t_i < q$ ，则我们加入区间 $[t_i, \min(s_i, q)]$ 。

可以发现：如果 $[j, j + 1]$ 这一小段落在某个加入的区间 $[t_i, \min(s_i, q)]$ 里面，那么公交车一定至少三次经过这一小段。这是因为公交车至少要从 mn 到 s_i ， s_i 到 t_i ，且 t_i 到 q 。

算法三

如果 $[j, j + 1]$ 满足 $j \geq q, j + 1 < mx$, 那么公交车至少两次经过这一小段。如果 $[j, j + 1]$ 满足 $j \geq p, j < q$, 但它不落在某个加入的区间内, 那么公交车至少一次经过这一段。这样, 我们可以得到答案的下界。

此外, 可以发现, 当答案下界在所有 q 中取最小的时候, 不存在 $s_i \geq q > t_i$ 的乘客 (否则将 q 换为 t_i 会得到更小的答案下界)

因此, 我们只要离散化之后计算出哪些线段被 $[t_i, s_i] (t_i < s_i)$ 覆盖住了, 再枚举 q , 就可以算出。使用简单的前缀和技巧, 就可以将 $O(n^2 + q)$ 优化到 $O(n \log n + q)$ 。

算法三

注：前面所叙述的思路有点绕，而且没有叙述得太清楚。如果你没有搞懂，大可以先忽略。这里再给出考场上容易想到且更容易理解

的描述。

仍然考虑特殊性质 B。我们给出如下结论：

存在一种最优方案由如下刻画给出：给出若干个区间

$[L_1, R_1], [L_2, R_2], \dots, [L_k, R_k]$ ，满足

$p < mn \leq L_1 < R_1 < L_2 < R_2 < \dots < L_k < R_k = mx$ ，则公交车的路

径是： $p \rightarrow R_1 \rightarrow L_1 \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \cdots \rightarrow R_k = mx \rightarrow L_k$ 。

如果你关心证明，可以采用复杂的调整法证明此结论，也可以采用前面叙述的估计每一段的经过次数的方法证明此结论。

算法三

已知此结论过后，我们只要求

$[L_1, R_1], [L_2, R_2], \dots, [L_k, R_k = mx]$ “包含了” 所有区间 $[t_i, s_i] (t_i < s_i)$ 。

我们找出所有区间 $[t_i, s_i] (t_i < s_i)$ 的并形成的“连通块”。容易发现某种最优方案必定是 $[L_1, R_1], \dots, [L_{k-1}, R_{k-1}]$ 恰好是前 $k-1$ 个连通块，而 $[L_k, R_k = mx]$ 包含最后所有的连通块。

复杂度为 $O(n \log n + q)$ 。如果你性质推得不彻底，或者你暴力枚举了 $L_k = q$ ，那么可能会得到 $O(n^2 + q)$ 的算法。

算法四

接下来考虑 $mn < p < mx$ 的情况。显然，公交车一定或经过 mn , mx 两点。我们不妨设公交车先经过 mn 再经过 mx ，否则做翻转 $x \rightarrow L + 1 - x$ 之后再运行原算法即可。

同样的，所有 $s_i < t_i$ 的乘客一定满足要求了。但不同于特殊性质 B 的是，我们需要思考公交车从 p 走到 mn 时有哪些乘客的要求被满足了。

假设从 p 到 mn 这一段，公交车经过的最靠右的点为 R_1 。那么恰好是所有 $mn \leq s_i \leq R_1$ 的乘客被接上了车，也必定在公交车走到 mx 前下了车。那么 p 到 mn 这一段中我们只需令公交车从 p 向右走到 R_1 ，再从 R_1 向左走到 mn ，余下的“绕弯”都是不需要的。

受此启发，我们给出一般情况下的结论：

在“翻转等价”的意义下，存在一种最优方案由如下刻画给出：给出若干个区间 $[L_1, R_1], [L_2, R_2], \dots, [L_k, R_k]$ ，满足 $mn = L_1 < p \leq R_1 < L_2 < R_2 < \dots < L_k < R_k = mx$ ，则公交车的路径是： $p \rightarrow R_1 \rightarrow L_1 = mn \rightarrow R_2 \rightarrow L_2 \cdots \rightarrow R_k = mx \rightarrow L_k$ 。

严格证明仍然需要一些精细的调整法的论证。

算法四

这样，我们求出所有 $[t_i, s_i] (t_i < s_i)$ 的区间所形成的连续段之后，可以发现：某个连续段的前缀被“包含在” $[L_1 = mn, R_1]$ 中，某个连续段的后缀被“包含在” $[L_k, R_k = mx]$ 中，而中间的连通块恰好是 $[L_2, R_2], \dots, [L_{k-1}, R_{k-1}]$ 。

我们先求出：固定 $[L_1 = mn, R_1]$ 所包含的连续段的前缀之后，得到的最优解大小。如果再枚举连续段的后缀，单次求解复杂度变为 $O(n)$ 。但我们可以用后缀最小值把它优化至 $O(n)$ 。

接下来，我们求出要求连续段的前缀包含 p 或者恰好是 $[mn, p]$ 所包含的前缀时，最优解的答案。这依然可以用后缀最小值轻松解决。

复杂度为 $O((n + q) \log(n + q))$ 。如果你暴力枚举了连续段的前缀或者连续段的后缀，那么复杂度会变为 $O((n + q)^2)$ 。而对于特殊性质 C ，有 $R_1 = p$ 的性质，也就是说你不需要枚举连续段的前缀。

祝大家 D2,D3,D4 考出好成绩!
谢谢大家!