2025 联合省选 岁月
解题报告

ltst

2025 年 2 月 20 日

简要题意

给定一个 n 个点 m 条边的简单带权无向图 G，考察随机图 G'，其中 G 上每条边的每个定向有 $\frac{1}{2}$ 的概率在 G' 上出现，有 $\frac{1}{2}$ 的概率不在 G' 上出现。所有随机事件之间是独立的。
求 G' 的最小外向生成树的边权和等于 G 的最小生成树边权和的概率，对大质数取模。
$n \leq 16$

特殊性质 A（$n, m \le 6$）

“G' 的最小外向生成树的边权和等于 G 的最小生成树边权和的概率”等价于“存在 G 的一个最小生成树 T 和一个点 x，定义 T_x 为将 T 以 x 为根定向得到的外向树，则 $T_x \subseteq G'$”。
暴力计算所有 G 上的最小生成树，这至多有 2^m 种。再枚举所有 2^{2m} 种可能的 G'，枚举最小生成树和根节点编号，判断对应的边是否全部存在即可。
复杂度 $O(2^{3m}\text{poly}(n))$。

特殊性质 B（边权两两不同）

不在最小生成树上的边不会影响最终答案，直接删去即可。边权两两不同时，最终会得到一棵树。

计算树的答案可以考虑树形 DP：设 $f_{x,p\in\{0,1\},q\in\{0,1\}}$ 表示考虑以 x 为根的子树，满足以下条件的概率：

- 命题 "x 子树内除 x 自身以外的所有节点到其父亲的有向边均在 G' 中" 的真实性为 p；
- 命题 "存在 x 子树内的某个节点 y，将 x 的子树定向为以 y 为根的外向树后所有有向边均在 G' 中" 的真实性为 q。

转移较为繁琐且与标算关系不大，此处略去。

另外，似乎答案与树形态无关，只和 n 的取值有关，所以还可以用特殊性质 A 的暴力打表。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \le 11$

没有边权，此时题设条件变为“图 G' 上存在一棵外向树”，而这又等价于“存在一个点可以到达其他所有点”。枚举可以到达所有点的点集 S，并尝试计算 p_S 表示集合 S **恰好**为可以到达所有点的点集的概率，那么答案为 $\sum_{S\neq\varnothing} p_S$。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \le 11$

注意到，“S 恰好为可以到达所有点的点集”等价于如下条件：

1. S 构成一个强连通分量；
2. 从 S 出发可以到达所有点；
3. 所有其他点都无法到达 S。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \leq 11$

注意到，“S 恰好为可以到达所有点的点集”等价于如下条件：

1. S 构成一个强连通分量；
2. 从 S 出发可以到达所有点；
3. 所有其他点都无法到达 S。

与此同时，这三个条件对 G' 的限制恰好构成一个对 G' 的划分（强连通分量限制 $G'[S]$ 的边，其他点无法到达 S 要求 $G' \setminus S$ 到 S 的边均不存在，而其他的边只对第二个条件有影响），因此 p_S 就是以上三个事件出现的概率乘起来。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \le 11$

设 $E(A,B)$ 表示从 A 到 B 的边数，第三个条件（所有其他点都无法到达 S）发生的概率就是 $2^{-E(G'\setminus S,S)}$。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \le 11$

设 $E(A,B)$ 表示从 A 到 B 的边数，第三个条件（所有其他点都无法到达 S）发生的概率就是 $2^{-E(G'\setminus S,S)}$。
计算第一个条件（S 构成一个强连通分量）的概率是经典问题（【清华集训 2014】主旋律），可以在 $O(1)$ 计算 $E(A,B)$ 的前提下 $O(3^n)$ 算出对于所有 S 该事件发生的概率。

特殊性质 C（边权为 1）& $n \le 11$

设 $E(A, B)$ 表示从 A 到 B 的边数，第三个条件（所有其他点都无法到达 S）发生的概率就是 $2^{-E(G'\setminus S,S)}$。
计算第一个条件（S 构成一个强连通分量）的概率是经典问题（【清华集训 2014】主旋律），可以在 $O(1)$ 计算 $E(A, B)$ 的前提下 $O(3^n)$ 算出对于所有 S 该事件发生的概率。
对于第二个条件（从 S 出发可以到达所有点），容斥：设 $f_T(S \subseteq T)$ 表示在 $G'[T]$ 中 S 可以到达 T 的概率，转移容斥掉 S 实际到达的点集小于 T 的情况：

$$f_T = 1 - \sum_{S \subseteq U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T\setminus U)}. \tag{1}$$

最终 $f_{G'}$ 即为答案。单次容斥复杂度 $O(3^{|G'\setminus S|})$，对所有 S 求和，总复杂度为 $O(4^n)$。

特殊性质 C（边权为 1）

目前复杂度的瓶颈是对每个 S 都要跑一遍容斥，不过我们注意到这 2^n 次容斥的形式是一致的，所以考虑合并一些无效的计算。固定一个 S，最初我们仅对 $S \subseteq T$ 定义 f_T 并按照如下形式计算：

$$f_T = 1 - \sum_{S \subseteq U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}. \tag{2}$$

特殊性质 C（边权为 1）

目前复杂度的瓶颈是对每个 S 都要跑一遍容斥，不过我们注意到这 2^n 次容斥的形式是一致的，所以考虑合并一些无效的计算。固定一个 S，最初我们仅对 $S \subseteq T$ 定义 f_T 并按照如下形式计算：

$$f_T = 1 - \sum_{S \subseteq U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}. \tag{2}$$

我们现在将定义域拉到所有的点子集，并这样写这个容斥式子：

$$f_T = [S \subseteq T] - \sum_{U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}. \tag{3}$$

可以归纳说明 $S \not\subseteq T$ 时 $f_S = 0$，因此这两个定义是一样的。注意到每次容斥只有前面的 $[S \subseteq T]$ 系数有区别，后面的枚举子集是一样的。

特殊性质 C（边权为 1）

这提醒我们，如果这样写容斥式子

$$f_T = a_T - \sum_{U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}, \tag{4}$$

那么把 a_T 替换成 $[S \subseteq T]$ 后对应的 $f_{G'}$ 就是 S 对应的概率。

特殊性质 C（边权为 1）

这提醒我们，如果这样写容斥式子

$$f_T = a_T - \sum_{U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}, \tag{4}$$

那么把 a_T 替换成 $[S \subseteq T]$ 后对应的 $f_{G'}$ 就是 S 对应的概率。独立考虑每个 a_T 对 $f_{G'}$ 的贡献。设 g_X 表示将 a_T 替换为 $[T = X]$ 后 $f_{G'}$ 的值，则一个 S 对应的答案就是 $\sum_{S \subseteq T} g_T$，因此只需要计算 g 之后高维后缀和就可以得到想要的概率。

特殊性质 C（边权为 1）

这提醒我们，如果这样写容斥式子

$$f_T = a_T - \sum_{U \subsetneq T} f_U 2^{-E(U, T \setminus U)}, \tag{4}$$

那么把 a_T 替换成 $[S \subseteq T]$ 后对应的 $f_{G'}$ 就是 S 对应的概率。
独立考虑每个 a_T 对 $f_{G'}$ 的贡献。设 g_X 表示将 a_T 替换为 $[T = X]$ 后 $f_{G'}$ 的值，则一个 S 对应的答案就是 $\sum_{S \subseteq T} g_T$，因此只需要计算 g 之后高维后缀和就可以得到想要的概率。
计算 g 只需要对应地利用容斥式子：

$$g_X = \sum_{X \subsetneq U} -g_U 2^{-E(X, U \setminus X)}. \tag{5}$$

初值为 $g_U = 1$。

特殊性质 C（边权为 1）

最后如何较快地 $O(1)$ 计算 $E(A,B)$。
注意到 $E(A,B) = |G'[A \cup B]| - |G'[A]| - |G'[B]|$，只需要高维前缀和算出 $|G'[A]|$ 即可。~~不过标算不是这么写的。~~

特殊性质 C（边权为 1）

这里简单描述一下验题人 gyh20 提供的一个可能简单一点的做法。

“S 恰好为可以到达所有点的点集” 等价于 “S 是图上唯一一个没有入度的强连通分量”。还是用主旋律的方法计算 S 构成一个强连通分量的概率，没有入度的概率依然是 $2^{-E(G\setminus S,S)}$。

S 的唯一性继续容斥，枚举实际上没有入度的强连通分量构成的点集 T 以及其划分。推导一下可以发现这个容斥实际上跟强连通分量的容斥基本是一回事。

正解

考虑边权不同的情况。先考虑给定一个固定的 G' 如何判断其最小外向生成树是否等于 G 的最小生成树。
对 G 运行 Kruskal。对于每个连通块，维护连通块内有哪一些节点可以作为连通块内最小外向生成树的根节点。如果某个最小外向生成树已经不是 G 对应导出子图的最小生成树了，那么显然 G' 已经不合法了。

正解

考虑边权不同的情况。先考虑给定一个固定的 G' 如何判断其最小外向生成树是否等于 G 的最小生成树。
对 G 运行 Kruskal。对于每个连通块，维护连通块内有哪一些节点可以作为连通块内最小外向生成树的根节点。如果某个最小外向生成树已经不是 G 对应导出子图的最小生成树了，那么显然 G' 已经不合法了。
不妨假设边权为 w 的边将连通块 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 连成一个，U_i 中点集 S_i 可以作为最小外向生成树的根节点，而 T_i 不可以。此时 S_i 可以作为整个大连通块的（边权和等于最小生成树的）最小外向生成树根节点的充要条件是，G' 中对应存在 $k-1$ 条有向边，加入这些边之后 S_i 可以到达所有的 S_j，也等于 G' 中 S_i 可以用 $\leq w$ 的边到达所有的 S_j。注意 T_i 可以自动地从 S_i 到达。

正解

为了利用特殊性质 C 的 DP，把每个 S_i 都缩成一个点 u_i，并按照如下方式连边得到有重边的有向图 G''。对一条边权为 w 的边 (x,y)：

- 若 $x\in S_i$ 且 $y\in S_j$，连一条 u_i 和 u_j 之间的双向边；
- 若 $x\in S_i$ 且 $y\in T_j$，连一条 u_j 到 u_i 的有向边，这是因为 S_j 可以利用 T_j 到达 S_i，但 S_i 不能通过到达 T_j 获得到达所有 S 的便利。
- 若 $x\in T_i$ 且 $y\in T_j$，不连边。

可以证明，S_i 可以作为整个大连通块的（边权和等于最小生成树的）最小外向生成树根节点的充要条件是 u_i 在 G'' 上可以到达所有节点。这也就对应到了特殊性质 C，即所有边没有边权的情况，只是图上有了一些有向边，此时 $E(A,B)$ 也是有向的。

正解

直接把这个东西放进 DP 里：对每个连通块 U 和非空集合 $S \subseteq U$，记录 p_S 表示 S 为可以作为（边权和等于最小生成树的）最小外向生成树的根的点集的概率。

合并时，对每个连通块都枚举一个非空的 S，按照上一页的做法构建 G''，再对 G'' 运行特殊性质 C，就可以得到每个点子集可以作为外向生成树的根的概率。最后把所有枚举结果加起来。

另外，可以通过 G'' 的构建方法得到 $E_{G''}(A, B) = E_G(\cup_{x \in A} U_x, \cup_{y \in B} S_y)$，因此还是可以按照特殊性质 C 的做法 $O(1)$ 计算 $E_{G''}$。

正解 - 复杂度分析

一次连通块 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 的合并的复杂度为

$$3^k \times \prod_{i=1}^{k}(2^{|U_i|} - 1), \tag{6}$$

其中 -1 的原因是 $S_i \subseteq U_i$ 需要非空。由于 $\frac{2^x-1}{2^{x-1}-1} \le 3$ 在 $x \ge 2$ 时恒成立，因此把 U_i 拆出来一个点总是会让复杂度增加。因此单次合并的最坏情况是所有连通块都是一个点，也就是 $3^{|\cup U_i|}$。最后在 Kruskal 重构树上，每个节点产生的代价是 $3^{\text{子树大小}}$，可以归纳证明总复杂度为 $O(3^n)$。