2025 联合省选 推箱子 解题报告

unzcjouhi, ltst

2025 年 3 月 2 日

简要题意

给定 n 个箱子，第 i 个箱子初始在 a_i 处，需要在时刻 t_i 以及之后处于 b_i 处，保证 $[a_1, \ldots, a_n]$ 与 $[b_1, \ldots, b_n]$ 单调递增。为此你可以在每个单位时间内将某个箱子移动一个单位长度，但需要保证任意时刻每个位置只有一个箱子。判断能否同时达成每个箱子的条件。

$n \le 2 \times 10^5$，$a_i, b_i \le 10^9$

特殊性质 B（$a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \cdots < a_n \le b_n$）

我们首先考虑特殊性质 B：此时由于 $[a_i, b_i]$ 是不交的，因此箱子之间的移动不会影响彼此。
此时我们可以将问题描述成：给定 n 个任务，第 i 个任务需要 $(b_i - a_i)$ 个单位时间完成，需要在时刻 t_i 之前完成。每个单位时间可以任意做任务，可以在任务进行的过程中停止并转头去做另一个任务。问是否能按要求完成所有任务。

特殊性质 B（$a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \cdots < a_n \le b_n$）

我们首先考虑特殊性质 B：此时由于 $[a_i, b_i]$ 是不交的，因此箱子之间的移动不会影响彼此。
此时我们可以将问题描述成：给定 n 个任务，第 i 个任务需要 $(b_i - a_i)$ 个单位时间完成，需要在时刻 t_i 之前完成。每个单位时间可以任意做任务，可以在任务进行的过程中停止并转头去做另一个任务。问是否能按要求完成所有任务。

定理 1

若以上问题有解，则按照 t_i 从小到大完成任务的方案必然是一组解。

根据以上定理，只需要将任务按照 t_i 排序后模拟该方案即可。

特殊性质 B（$a_1 \le b_1 < a_2 \le b_2 < \cdots < a_n \le b_n$）

定理 1 证明：

假设存在一组解，第 $i(1 \le i \le \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i))$ 个单位时间里做的是第 p_i 个任务。此时第 $j(1 \le j \le n)$ 个任务完成的时间为 $T_p(j) = \max_{p_k=j} k$，且有 $\forall 1 \le i \le n, T_p(i) \le t_i$。

若该方案不是按照 t_i 从小到大完成的，那么 $\exists 1 \le j < \sum_{i=1}^{n}(b_i - a_i), t_{p_j} > t_{p_{j+1}}$。交换 p_j 与 p_{j+1} 得到序列 p'。

由于 p_{j+1} 向前移动，所以 $T_{p'}(p_{j+1}) \le T_p(p_{j+1}) \le t_{p_{j+1}}$。

尽管 p_j 向后移动，但其移动到的是 p_{j+1} 的位置，所以 $T_{p'}(p_j) \le \max(T_p(p_j), T_p(p_{j+1}))$，而 $T_p(p_j) \le t_{p_j}$，$T_p(p_{j+1}) \le t_{p_{j+1}} < t_{p_j}$，所以 $T_{p'}(p_j) \le t_{p_j}$。

因此交换一个逆序对仍然可以得到一个合法的方案，不断交换即得到按照 t 从小到大完成的方案。

平方做法

对于更一般的情况，箱子之间可能互相影响。不过我们依然可以证明与特殊性质 B 相同的结论成立。

定理 2

若题设问题有解，则以下方案一定是一组解：

- 将箱子按照 t 从小到大排序并按照顺序将每个箱子推到目标位置。
- 推每个箱子的过程中，仅进行“必要”的操作。例如将当前箱子向右推的过程中，若当前箱子右侧有一个箱子的连续段，则将该连续段的箱子从右往左依次向右推一个单位长度。

模拟以上流程，复杂度为 $O(n^2)$。

平方做法

定理 2 证明：
首先，若题设问题有解，那么必然存在一个方案，每个箱子都不会绕远路，即每个箱子一定朝着 b_i 的方向移动。设该方案为 $p_1, \ldots, p_{\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i|}$，其中第 i 个元素 p_i 为一个三元组 (x, y, z)，表示该方案在时刻 i 将箱子 x 从位置 y 移动到位置 z。注意到这一次移动不仅对于箱子 x 到达目的地来说是必要的，因为 x 可能挡其他箱子的路。定义 $t_{(x,y,z)}$ 为所有为了到达目的地必须进行 (x, y, z) 的移动的箱子中 t 的最小值。
先不考虑任何限制，例如先进行 (x, a, b) 才能进行 (x, b, c)，以及箱子不能重合。通过定理 1，我们可以得到一个按照 $t_{(x,y,z)}$ 排序的方案，在不考虑限制的情况下满足所有箱子的时间限制。
最后注意到（不妨假设每个箱子的 t 互不相同）$t_{(x,y,z)}$ 相等的所有移动恰好是某个箱子的“必要”移动，因此可以重排它们以满足其他限制。

正解

最后我们只需要快速地模拟定理 2 给出的流程。注意到将箱子 x 从当前位置 p_x 移动到 b_x（不妨假设 $z > y$）时，若 $p_{x+1} \le b_x$ 则 $x+1$ 需要移动到 b_x+1；若 $p_{x+2} \le b_x+1$ 则 $x+2$ 需要移动到 $b_x+2 \cdots\cdots$ 若 $p_{x+y} \le b_x+y-1$，则 $x+y$ 需要移动到 b_x+y。可以在线段树上二分得到 $p_{x+y} \le b_x+y-1$ 的最大的 y，然后区间覆盖修改所有的 p_x，并通过起始和最终状态的距离差得到到达当前状态需要的总时间长度。
另外也可以把所有相邻的箱子看成一个连续段并使用 set 维护。
复杂度 $O(n \log n)$。