

图排列 题解

xiaolilsq

2025 年 X 月 Y 日

题意简述

小 Q 有 m 个互不相同的无序正整数二元组 $\{(u_i, v_i)\}_{i=1}^m$ ，且满足 $1 \leq u_i, v_i \leq n$ ， $u_i \neq v_i$ ，不妨假设 $u_i < v_i$ 。小 Q 发现这 m 个二元组有着如下性质：当将二元组 (u_i, v_i) 视为开区间 (u_i, v_i) 时，满足任意两个开区间要么是完全包含关系要么互不相交。

小 D 有一个 $1 \sim n$ 的排列 p 。小 Q 和小 D 利用各自手上的二元组和排列一起构建了一张 n 个点 m 条边的无向图 $G(V, E)$ ，其中 $V = \{1, 2, \dots, n\}$ ， $E = \{(p_{u_i}, p_{v_i}) \mid i \in \{1, 2, \dots, m\}\}$ 。现在小 I 得知了图 $G(V, E)$ ，小 I 想要知道小 D 手中的排列 p 是什么。

由于小 I 手中的信息不足，排列 p 有很多种可能，小 I 希望你告诉他其中字典序最小的那一个。

小 Q，小 D 和小 I 是很好的朋友，他们保证不会骗对方，也就是说至少存在一个可能的 p 满足条件。

要求做到 $O(n \log n)$ 。

题解

首先这题等价于找到一个将图嵌入平面中，满足图的点都在单位圆上，且图的每条边都是线段，且边都不相交的最小字典序的方案。

这个转化可以让我们的思考更加直观，首先转化后第一眼就可以看出最小字典序一定可以通过旋转单位圆使得 1 总是排在第一位。

观察子任务，可以得知有两个关键点，一是**图是否连通**，二是**图是否有环**。

题解

先考虑最容易的情况，图连通且图无环，也就是说图是一棵树。不妨以 1 为根，那么可以证明每棵子树内的点都在单位圆上的一个连续段内。

证明方法：假设存在一棵子树内部点不为连续段，那么这些点必然将单位圆分割成大于 1 个连续段，由于除去子树内除去子树根以外的点和边后图仍然连通，那么说明这些大于 1 个的连续段也是连通的，而子树内部也是连通的，由此二者的边必然相交，矛盾。

而我们也可以归纳证明这是充要的。子树之间显然独立，且满足局部最优为全局最优，此后依次考虑每棵子树内部，贪心地排列即可。

题解

接下来考虑图连通有环的情况。关于有环先考虑最简单的情况，也就是图刚好是一个简单环，我们可以证明简单环上面的任意连续段嵌入到单位圆上也必须要是连续段，由此立即得出在这种最简单的情形中图也只存在两种嵌入方式——顺时针和逆时针。

考虑一个点双 G 什么时候存在至少一个嵌入方式，首先一个简单环中间加上若干条不相交的边一定存在一种合法的嵌入方式。而对于一个极其简单的结构

$E = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$ 我们就能发现其没有合法的嵌入方式。而如果我们能够通过删掉边以及缩二度点从图 G 得到这个结构，那么 G 一定不存在一个合法的嵌入方式。由此我们可以得到存在至少一个嵌入方式的 G 只能是一个简单环加上若干条不相交的边。

那么我们该如何找到合法的 G 存在的这一条环，也即哈密顿回路呢？这个图由于存在特殊性质，我们可以通过每次缩二度点的方式唯一确定这条哈密顿回路，而二度点的存在性也是非常容易证明的。

知道了点双如何嵌入，剩下的其实和树差不多，不过我们现在是在圆方树上面贪心即可。

题解

最后问题是图不连通怎么办，同样有局部最优为全局最优，每个连通块先依次找到最优方案，然后就是合并。

合并同样是贪心，对于若干个序列每次找可以放到开头的最小值，用一个栈维护当前序列中的连通块编号，所谓可以放到开头的要么就是和栈顶在同一个连通块中，要么就是还没有入过栈的元素，找最小值使用堆即可。

总时间复杂度为 $O(n \log n)$ 。

吐槽环节