2025 联合省选 lucky

Little09, Itst

2025 年 3 月 1 日

1. 题意简述
2. 题目解法

题意简述

对于 n 组正整数 (a_i, b_i)，计算 a_1 个 b_1，a_2 个 b_2，……，一直到 a_n 个 b_n，构成的可重集的中位数。

m 个元素的可重集中位数为第 $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor$ 小的数。

每个 a_i 和 b_i 都有一个区间作为范围。求有多少种可能得到的中位数。

$\sum n \leq 6 \times 10^5$，值域 10^9。

$n \le 4$，特殊性质 A

直接枚举所有方案，并计算中位数。
时间复杂度 $O(n^{2n} \cdot \mathrm{poly}(n))$。
可以获得 20 分。

特殊性质 AB

考虑枚举每个数 k 能否作为中位数。
不难观察到对于一段区间，如果其包含 k 那么取它为 k 是不劣的。剩余不包含 k 的区间具体取多少不影响判定。
因此容易做到 $O(n)$ 判定，总复杂度为 $O(n^2)$，期望得分 20 分。

特殊性质 AB

考虑枚举每个数 k 能否作为中位数。
不难观察到对于一段区间，如果其包含 k 那么取它为 k 是不劣的。剩余不包含 k 的区间具体取多少不影响判定。
因此容易做到 $O(n)$ 判定，总复杂度为 $O(n^2)$，期望得分 20 分。
使用前缀和优化，容易通过 $O(n)$ 预处理，$O(1)$ 得到对于每个 k，包含它的区间和严格在其左侧、右侧的区间对应的个数和。
优化后复杂度为 $O(n)$，期望得分 30 分。

特殊性质 B

需要解决值域较大的情况。
只需要对值域进行离散化，即将数轴按照 $[Lb_i, Rb_i]$ 划分为 $O(n)$ 段，每段能否成为中位数的情况是一致的，因此从每段中任选一个数判断其能否成为中位数即可。
前缀和优化前 $O(n^2)$，优化后 $O(n \log n)$（瓶颈在于离散化），期望得分 50 分。

正解

仍然考虑一个数 k 成为中位数的条件。
设集合里小于 k，等于 k，大于 k 的数分别有 x, y, z 个，容易得到 k 为中位数的充要条件为 $A = y + z - x > 0$ 和 $B = x + y - z \geq 0$。
因此一个区间如果包含 k，那么将其改为 k 一定更优，因为这会导致 A, B 一者不变一者增加。并且这样的区间一定会取尽可能多的数，增加 y 的值。

正解

剩下的区间要么小于 k 要么大于 k，此时 y 的值已经确定，我们可以将条件改写为 $-y \le x - z < y$。
而 x, z 的取值也为区间，因此 $x - z$ 的取值为区间。计算出这个区间后，判断其与 $[-y, y-1]$ 是否有交即可。注意 $y = 0$ 时一定无交。
前缀和优化前 $O(n^2)$，优化后 $O(n \log n)$（瓶颈在于离散化），期望得分 100 分。