

Petrozavodsk Summer 2024 Day 5 — Problem B: Build Well

1 题目大意

原题链接: [QOJ 题面](#)

有 n 种砖块, 长度为正整数 b_1, \dots, b_n , 每种数量无限。要围成一圈周长为 w 的单行砖环, 并将这样的环无限向上叠放。要求: 任意相邻两行的所有缝隙 (砖与砖的交界点) 不能在同一竖线上重合。由引理 1 可知: 只要给出两行配置 C_1, C_2 使相邻两行不发生缝重合, 则交替摆放即可铺出全局, 因此只需输出两行配置 C_1, C_2 (行内砖数、从零点起的顺时针偏移、以及砖长序列)。

输入 第一行两个整数 n, w 。第二行给出 n 个正整数 b_1, \dots, b_n , 表示可用砖长。

输出 第一行输出一个单词: `possible` 或 `impossible`。若为 `possible`, 接着输出四行描述两个配置 C_1, C_2 : 第 1 行为 C_1 的“砖块个数与偏移量”, 第 2 行为 C_1 的砖长序列; 第 3 行为 C_2 的“砖块个数与偏移量”, 第 4 行为 C_2 的砖长序列。要求两配置交替铺设时, 相邻两行无缝重合。

2 数据范围

- $1 \leq n, w \leq 3 \times 10^5$;
- $1 \leq b_i \leq w$, 每种数量无限;
- 时间限制 5 秒, 内存限制 1024 MB。

3 记号与约定

位置按模 w 的加法群 \mathbb{Z}_w 比较, 零点为 $0 \in \mathbb{Z}_w$ 。对集合 $S \subseteq \mathbb{Z}_w$ 与整数 δ , 记

$$S + \delta := \{s + \delta \pmod{w} : s \in S\}.$$

对任意集合 A , 记 $\#A$ 为其基数。

单行配置 C 由起点偏移 $o \in \mathbb{Z}_w$ 与有序序列 (ℓ_1, \dots, ℓ_m) (各为可用砖长, 且 $\sum_{i=1}^m \ell_i = w$) 确定。其缝集合定义为

$$S(C) := \left\{ o + \sum_{i=1}^r \ell_i \pmod{w} : r = 0, 1, \dots, m-1 \right\},$$

故缝数 $\#S(C) = m$ 。同一多重集的任意排列视作等价的单行可行解类。

方括号记法: 用 $[x]$ 表示一段长度为 x 的连续砖段; 用 $[1^k]$ 表示 k 个 1 砖的连续串接。相邻方括号并置表示顺序串接。

区间与比较：当用于整数索引时， $[x, y]$ 表示整数闭区间 $\{x, x+1, \dots, y\}$ 。当用于圆周弧段时，记 $[t, t+L)$ 为从位置 $t \in \mathbb{Z}_w$ 出发沿顺时针前进 L 个单位所经过的半开弧（端点按模 w 计）。在同一弧段内部进行大小比较时，固定 t 的代表元 $\tilde{t} \in \{0, \dots, w-1\}$ 并在区间 $[\tilde{t}, \tilde{t}+L)$ 内按整数比较；其他等式/不等式若未注明，默认按模 w 的等同类比较。

4 详细做法

把问题分解为“一行能否凑满”和“如何避免缝重合”。

1. 先判仅用非 1 砖能否凑 w 。这是标准的无限背包（硬币问题）。若可行，则取此行作为 C_1 ，令 C_2 采用相同砖序列，但整体偏移比 C_1 大 1。该行只由长度 ≥ 2 的砖组成，任意相邻缝之间在圆环整数位置上的间距至少为 2，因此 $S(C_1) \cap (S(C_1)+1) = \emptyset$ （按模 w 比较），两行不发生缝重合。
2. 若仅用非 1 砖不可凑满：
 - 若不存在 1 砖（即所有 $b_i > 1$ ，但这一步判定失败），则无解；
 - 若仅存在 1 砖（即没有任何 > 1 的砖），则任一行的缝集合为 \mathbb{Z}_w ，两行无论选何偏移均完全重合，故无解；
 - 否则（既存在 1 又存在一些 > 1 的砖），进入下一步的 gadget 化。
3. 必须含 1 的情形——gadget 化、恢复。本小节固定 C_2 的整体偏移比 C_1 大 1。
 - 定义 **gadget**：取一块非 1 砖 $b > 1$ 与同侧 k 个 1 砖（ $0 \leq k \leq b-2$ ）拼成一段（总长 $b+k$ ）；在两行中把该段反向摆放

$$C_1: [b][1^k], \quad C_2: [1^k][b].$$

- 若能把 w 表示为若干 gadget 的长度之和（保持两行内各段顺序一致）则整体稳定。可作 gadget 的长度取所有满足存在 $b > 1$ 且

$$b \leq \ell \leq 2b-2$$

的整数 ℓ 。将这些 ℓ 视为“可用长度”，再做一次“能否凑到 w ”判定并据此恢复构造 C_1, C_2 。

5 正确性证明

本节默认：存在至少一类 > 1 的砖，且存在至少一种单行方案使用 1；否则已在上一节判定为无解，不进入本节。在此前提下，记所有至少用到 1 砖的单行方案中，1 的最小用量为 k_{\min} ；所有 > 1 砖长的最小值为 b_{\min} ，二者定义良好。称达到 k_{\min} 的任一单行方案为“最小 1 解”。

引理 1 (两行交替足以生成全局). 若存在两行 C_1, C_2 的缝集合 $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{Z}_w$ 满足 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, 则由 C_1, C_2 交替堆叠得到的无限高构型合法。

证明. 相邻两行只可能是 (C_1, C_2) 或 (C_2, C_1) , 两种配对的缝集合分别为 (S_1, S_2) 与 (S_2, S_1) , 均不相交。 \square

引理 2 (极值不等式). $k_{\min} < b_{\min}$ 。

证明. 若 $k_{\min} \geq b_{\min}$, 在“1 最少”的解中至少有 b_{\min} 个 1。以一块 b_{\min} 替换它们保持和为 w 且令 1 更少, 矛盾。 \square

引理 3 (gadget 正确性). 设 $b > 1, 0 \leq k \leq b - 2$, 令一段长度 $L = b + k$ 。在 C_1 中该段摆作 $[b][1^k]$, 在 C_2 中摆作 $[1^k][b]$, 并固定 C_2 的整体偏移比 C_1 大 1。记该段在 C_1 中的左端位置为 $t \in \mathbb{Z}_w$, 并取其代表元 $\tilde{t} \in \{0, \dots, w - 1\}$, 则在弧段 $[\tilde{t}, \tilde{t} + L)$ 内:

$$S_1 = \{\tilde{t}, \tilde{t} + b, \tilde{t} + b + 1, \dots, \tilde{t} + b + k - 1\},$$

$$S_2 = \{\tilde{t} + 1, \tilde{t} + 2, \dots, \tilde{t} + k + 1\},$$

且 $S_1 \cap S_2 = \emptyset$; 两段首尾拼接时, 相邻两段的公共边界在两行中的缝分别位于 $\tilde{t} + L$ 与 $\tilde{t} + L + 1$ (取模 w 后), 亦不重合。

证明. 内部缝为

$$S_1^{\text{int}} = \{\tilde{t} + b, \tilde{t} + b + 1, \dots, \tilde{t} + b + k - 1\}, \quad S_2^{\text{int}} = \{\tilde{t} + 2, \tilde{t} + 3, \dots, \tilde{t} + k + 1\}.$$

由 $k \leq b - 2$ 得 $\tilde{t} + k + 1 \leq \tilde{t} + b - 1 < \tilde{t} + b = \min S_1^{\text{int}}$, 故 $S_1^{\text{int}} \cap S_2^{\text{int}} = \emptyset$ 。端点与内部缝不交, 且段与段拼接处两行位置相差 1, 不重合。 \square

定理 1 (两类结构性无解). 若出现下列任一情形, 则必无稳定解:

(E1) $k_{\min} = b_{\min} - 1$ 且 $w = 2b_{\min} - 1$;

(E2) 所有可用非 1 砖均为 2, 且 w 为奇数。

证明. **E1.** 因 $w = 2b_{\min} - 1 < 2b_{\min}$, 任一单行解至多含一块非 1 砖, 且其长度不超过 b_{\min} 。任一行的缝数至少

$$(w - b_{\min}) + 1 = b_{\min}.$$

两行合计缝数至少 $2b_{\min}$, 但可用位置仅 $w = 2b_{\min} - 1$ 个, 鸽巢原理得必有重合。

E2. 设一行中 1 的个数为 ℓ , 2 的个数为 m , 则 $w = \ell + 2m$ 。当 w 为奇数时 ℓ 必为奇数, 缝数 $\ell + m = (w + \ell)/2 \geq (w + 1)/2$ 。两行合计缝数至少 $w + 1$, 必有重合。 \square

定理 2 (除 E1/E2 外皆可解 (等价于 gadget 分解)). 若不属于定理 1 的两类情形, 则存在稳定解; 等价地, 存在一行可行解能拆成若干满足 $0 \leq k_j \leq b_j - 2$ 的 gadget 之和。

证明. 由引理 2, $k_{\min} \leq b_{\min} - 1$. 对“最小 1 解”分三类:

- $k_{\min} \leq b_{\min} - 2$: 将全部 k_{\min} 个 1 集中拼到任意一块 $b \geq b_{\min}$ 的同侧, 得到合法 gadget; 将每块非 1 砖与分配到它的 1 合成 gadget, 整行即为 gadget 串接。
- $k_{\min} = b_{\min} - 1$ 且存在 $b > b_{\min}$: 将全部 k_{\min} 个 1 集中到这块 b 上, 因 $b \geq b_{\min} + 1$, 有 $k_{\min} \leq b - 2$, 合法。
- $k_{\min} = b_{\min} - 1$ 且所有非 1 砖都为 b_{\min} : 若“最小 1 解”仅含一块非 1 砖, 则 $w = 2b_{\min} - 1$, 属 E1; 否则存在至少两块非 1 砖, 可将 $b_{\min} - 2$ 个 1 拼入一块, 将剩余的 1 拼入另一块。若同时所有非 1 砖都为 2 且 w 为奇数, 则属 E2; 不在该情形时即可完成 gadget 串接。

将这些 gadget 按同序在两行中反向摆放, 并固定整体偏移差为 1; 由引理 3 各段范围与拼接边界均不重合, 得到稳定解。□

定理 3 (算法正确性). 按“详细做法”产生的输出满足: 若输出 *possible* 并给出 C_1, C_2 , 则两行交替堆叠合法; 若输出 *impossible*, 则不存在任何合法构型。

证明. 若第一步“仅用非 1 砖能凑 w ”成功, 令两行使用相同砖序列且整体偏移差为 1。行内任意相邻缝的间距至少为 2, 故 $S(C_1) \cap (S(C_1) + 1) = \emptyset$, 由引理 1 合法。

若进入第三步并在“gadget 长度能凑 w ”中成功, 将每段按引理 3 的规则在两行反向摆放且整体偏移差为 1。各段内的缝集合两两不交, 段与段拼接处两行位置相差 1, 故整行 $S(C_1)$ 与 $S(C_2)$ 仍不交, 再由引理 1 合法。

若输出 *impossible*, 则第一步失败, 任何单行方案必用到 1; 第三步亦失败, 即 w 不能表示为若干满足 $0 \leq k \leq b - 2$ 的 gadget 长度之和。若属于定理 1 的情形, 则无解; 否则由定理 2, 存在稳定解当且仅当存在上述 gadget 分解, 现已否定, 故无解。□

6 复杂度分析

需要进行两次“能否凑到 w ”的判定。先将完全背包二进制拆分并按重量去重, 转化为 0-1 背包, 再用位集做移位或更新。状态长度为 w , 每次扫描代价为 $\mathcal{O}\left(\frac{w}{64}\right)$, 更新次数不超过 w 。因此每次判定的时间复杂度为 $\mathcal{O}\left(\frac{w^2}{64}\right)$, 空间复杂度为 $\mathcal{O}(w)$; 两次判定的总复杂度同阶。

7 参考资料

1. OI-Wiki, 背包 DP, <https://oi-wiki.org/dp/knapsack>
2. Petrozavodsk Summer 2024 Day 5 — Problem B: Build Well — Editorial.