

QOJ10083 解题报告

东营市胜利第一中学 王一策

2025 年 9 月 25 日

目录

1 题目描述	1
2 数据范围	1
3 解题过程	1
3.1 算法 1	1
3.2 算法 2	1
3.3 算法 3	2
3.4 算法 4	2

1 题目描述

给定 n 个长度为 m 的排列，问是否存在一种重排方式（把这 n 个排列改变顺序排成一排），使得从第一个排列变为第 n 个排列的过程中，两个元素的相对位置关系至多变化一次。

2 数据范围

$$n \leq 10^5, nm \leq 10^6。$$

3 解题过程

3.1 算法 1

暴力枚举重排顺序并检验，复杂度 $\mathcal{O}(n!m^2)$ 。

3.2 算法 2

注意到一个性质：设 $f(i, j)$ 表示在第 j 个排列的基础上，最少相邻交换几次能变成第 i 个排列，也就是 i 相对于 j 的逆序对数。显然有 $p(i, 1)$ 关于 i 递增。

所以暴力枚举第一个排列是什么，然后计算其余所有的排列相对于他的逆序对数量，并依此排序。然后暴力判断相邻的两个排列是否满足条件，复杂度 $\mathcal{O}((nm)^2)$ 。

3.3 算法 3

可以优化检验的复杂度。排成一列之后，可以证明 $\forall i > 1, f(i, 1) - f(i - 1, 1) = f(i, i - 1)$ 是这个排列方式合法的充要条件。

因为第 i 个排列会比第 $i - 1$ 个排列多一些逆序对，类似三角形不等式，如果增加了 k 个逆序对则 i 相对于 1 也最多增加 k 个逆序对。而根据合法的定义，只有恰好等于 k 的时候才是合法的。

所以瓶颈在于计算每两个排列之间的逆序对，复杂度 $\mathcal{O}(n^2 m \log m)$ 。

3.4 算法 4

现在复杂度的瓶颈在于需要枚举开头排列，考虑如何优化。实际上排列之间的逆序对是满足类似直径的限制的，即相对一个排列逆序对数最多的排列，一定是合法方案中的开头排列或者结尾排列。

所以先任取一个 i ，找到相对 i 逆序对最多的排列 j 直接作为开头排列，然后再计算一遍其余排列相对 j 的逆序对数并按照算法 3 中的流程检验即可，复杂度 $\mathcal{O}(nm \log n)$ 。