QOJ10543 Square Stamping 解题报告

题目大意

给定平面上的 n 个点 (x_i, y_i)，其中满足 $y_i \in \{-9999, 0, 9999\}$。

求至少使用多少个边长为 10000 的正方形，使所有点都被至少一个正方形覆盖（一个正方形可以覆盖所有其内部或边上的点）。

数据范围

$1 \le n \le 3\times 10^5, -10^9 \le x_i \le 10^9, y_i \in \{-9999, 0, 9999\}$。

解题过程

算法一

令 $dp_{i,j,k}$ 表示 $y = -9999$ 的点覆盖了前 i 个，$y = 0$ 的点覆盖了前 j 个，$y = 9999$ 的点覆盖了前 k 个所使用的正方形数量最小值。

暴力转移的时间复杂度为 $O(n^3)$。

算法二

考虑每次覆盖一定是覆盖两行，那么：

- 如果最靠右的覆盖是覆盖的前两行，那转移到的 (i, j) 一定是 “相邻” 的，只有 $O(n)$ 对 (i, j) 是可能被转移到的。
- 否则，转移到的 (j, k) 一定是 “相邻” 的，因此只有 $O(n)$ 对 (j, k) 是可能被转移到的。

于是直接记忆化搜索，遍历到的总状态数只有 $O(n^2)$ 个而不是 $O(n^3)$ 个。

时间复杂度根据实现为 $O(n^2 \log n)$ 或 $O(n^2)$。

算法三

- 当第一行的第 i 个点是最靠右的点时，选择的最靠右的正方形一定是覆盖**前两行**的。
- 当第三行的第 k 个点是最靠右的点时，选择的最靠右的正方形一定是覆盖**后两行**的。
- 当第二行的第 j 个点是目前最靠右的点时，选择的最靠右的正方形需要决策是前两行还是后两行。

称一个满足 “所有未被覆盖的恰好是位置 $\le X$ 的所有点” 的局面为 “完整” 的。

如果连续选择两个 “前两行”，就意味着选择第一个 “前两行” 后局面就已经是 “完整” 的了。连续选择两个 “后两行” 同理。

对所有 “完整的” 局面设计状态，那么相邻两个 “完整” 状态之间一定形如 “交错选择前两行和后两行”。

我们不使用数据结构优化转移，而是考虑直接单步转移，问题是状态数就是 $O(n^2)$ 的了。考虑到 “交错” 导致的结果：当最靠右的点的横坐标为 X 时，dp 的结果一定 $\le$ 在 X 处 “完整” 局面的结果，但 $\ge$ 在 X 处完整局面的结果 -1（因为可以多使用一次操作覆盖 X 的完整局面）。

于是，只需要维护 “完整” 状态的 dp 值，以及 “前两行满足 $\le X$ 都选，答案为 X 处完整局面对应答案 -1 时，第三行至多覆盖多少个”，和 “后两行满足 $\le X$ 都选，答案为 X 处完整局面对应的答案 -1 时，第一行至多覆盖多少个“。

那么现在的状态数是 $O(n)$ 的并且转移只需要单步转移。开始需要排序，转移也需要 `lower_bound`，因此时间复杂度为 $O(n\log n)$。

另解

对算法二的记忆化搜索算法加入算法三开头所提到的剪枝：

- 当第一行的第 i 个点是最靠右的点时，选择的最靠右的正方形一定是覆盖**前两行**的。
- 当第三行的第 k 个点是最靠右的点时，选择的最靠右的正方形一定是覆盖**后两行**的。
- 当第二行的第 j 个点是目前最靠右的点时，选择的最靠右的正方形需要决策是前两行还是后两行。

该做法的时间复杂度为 $O(S\log n)$，其中 S 为记忆化搜索涉及的状态总数。在本题所给出数据下，S 的值很小，几乎是 $O(n)$ 的，因此可以轻松通过。但 S 具体能卡到多大的数量级本人还不得而知，如果大家对此有想法欢迎与本人交流。

参考资料

QOJ10543 题面：https://qoj.ac/problem/10543

QOJ10543 题解：https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=1989&r=1

与杨永昌同学、柳宏谦同学关于本题的交流，感谢他们提供的帮助。