

# QOJ10542 Protecting Kingdom 解题报告

---

## 题目大意

---

给定一棵  $n$  个点的树，第  $i$  条边有正整数边权  $l_i$ 。

在第  $i$  条边上依次排列着  $k_i$  个“附加点”，给定这  $k_i$  个附加点到边的一个端点的距离（保证距离两两不同，且  $\neq 0, l_i$ ）。

你需要找到一条长度  $\leq w$  的路径，路径的端点可以是原树上的点，也可以是“附加点”。

最大化路径上的“附加点”数量（不包含原树上的点）。

## 数据范围

---

$2 \leq n \leq 250000, 0 \leq \sum k_i \leq 10^6, 1 \leq l_i \leq 10^{12}, 1 \leq w \leq 10^{18}$ 。

## 解题过程

---

### 算法一

使用点分治，可以做到时间复杂度  $O(n \log^2 n)$ 。

### 算法二

抛弃“在重心处统计贡献”而考虑“在  $lca$  处统计贡献”。

维护  $x$  子树内到达  $x$  的路径上有  $i$  个“附加点”时，路径长度的最小值（实际维护的是到整棵树的根的距离最小值）。在子树合并时更新答案并维护该信息。

要维护的信息与“深度、距离”有关，因此考虑长链剖分。

一共进行  $O(n)$  次信息合并，信息合并时对答案的更新可以直接二分找到另一侧至多选多少个“附加点”。

时间复杂度  $O(n \log n)$ 。

### 算法三

考虑均摊的更新答案：令目前的答案为  $ans$ ，则在信息合并的时候，不断判断  $ans + 1$  个“附加点”的路径长度是否  $\leq w$ ，如果合法就令  $ans++$ 。

$ans$  至多为  $n$ ，因此更新答案是均摊  $O(n)$  的。

时间复杂度  $O(n)$ 。

## 参考资料

---

QOJ10542 题面：<https://qoj.ac/problem/10542>

QOJ10542 题解：<https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=1989&r=1>