1 QOJ10092 Interactive Primality

1.1 题目大意

交互库有一个未知的正整数 x。先需要对交互库进行若干次询问以确定 X 的值。一次询问中给定交互库一个正整数 y，交互库会回答 $x+y$ 是否是质数。

一组数据中总共会进行 T 次交互，要求这 T 次操作的总操作次数不超过 L。

1.2 数据范围

$T=10, L=8750, 1\le x\le 10^{18}$，询问的 y 需满足 $1\le y\le 10^{18}$。

1.3 解题过程

对于一次询问，如果得知 $x+y$ 为质数，则可以确定对于任意的质数 $p<x+y$，都满足 $p\nmid x+y$，即 $x\not\equiv -y \pmod p$。

如果我们能够对一个 p 确定有 $p-1$ 个不同的余数 y 都与 x 模 p 不同余，则可以唯一确定 $x \bmod p$ 的结果。根据中国剩余定理 [**CRT**]，如果我们对 $p_1,p_2,\cdots,p_k$ 这些质数都确定了 x 模它们的值，则在 $[1,\prod p_i]$ 范围内有且仅有一个合法的整数 x。

因此我们希望找到若干质数，使得它们的乘积超过 10^{18}，并尝试求出 x 模它们的全部余数。可以发现 $2\times 3\times 5\times\cdots\times 53$ 刚好 $>10^{18}$，故我们下面令 $p_1=2,p_2=3,\cdots,p_k=53$ 为前若干个质数。

由于我们不知道关于 x 的任何信息，所以只能随便询问一些 y，直到确定 $x+y$ 为质数。从这里开始，我们对于每个 p_i，已经能够确定一个不可能作为余数的数了，因此接下来不再随机询问，而是考虑一些更好的策略。

如果对于一个 p_i，x 模它的余数只剩下一种可能性 x_i，那么我们接下来就不能选用任何 $y\equiv -x_i \pmod{p_i}$ 的数 y 进行询问，否则得到的回答不可能是质数。

另一方面，如果一个 p_i 还有至少两种可能性，那么选用一个已经被排除的 y 不会带来任何额外的信息，所以我们在剩余的可能性中随机选择一个作为 $y \bmod p_i$ 的余数。

按照这种方式随机选择，第一次得到质数回复的期望步数为质数密度的反比。根据质数密度定理 [**prime_density**]，$\le n$ 的质数密度为 $\frac{1}{\ln n}$，即期望 $\ln n$ 步能问到一个质数。

对于之后的询问，我们每得到一个质数的回复，就会对所有仍未确定的 p_i 删去一种剩余可能性。所以总共会询问 $p_k-1=52$ 轮。对于第 i 轮，一个 $p_j>i$ 还剩下 p_j-i+1 种可能性没有被确定，故对于它来说，会选中恰好为 x 对应的唯一不合法情况的概率是 $\frac{1}{p_j-i+1}$，即能够得到质数回复的概率为 $\prod_{p_j>i}\frac{p_j-i}{p_j-i+1}$。

然而这个分析没有考虑到 $>p_k$ 的质数对概率的影响，因为可能会出现某个 $p>p_i$ 恰好为 $x+y$ 的因数的情况。为了分析这个概率，注意到上界 $N=10^{18}$ 与所有已考虑过的 p_i 之积同阶，所以在所有

$[1,N]$ 的数中，满足不被任何一个 p_i 整除的数的比例可以用 $\prod \frac{p_i-1}{p_i}$ 来估计。显然所有质数都分布在这些数中，所以在这个范围内均匀随机，得到质数的概率即为 $\frac{1}{\ln n}\prod \frac{p_i}{p_i-1}$。

因此加上这个概率，第 i 轮中一次询问得到质数回复的概率为 $\frac{1}{\ln n}(\prod_{p_j>i} \frac{p_j-i}{p_j-i+1})(\prod_j \frac{p_j}{p_j-1})$，即期望步数为这个概率的倒数。经过实际测试，总期望步数约为 860，因此 10 组测试询问总数不超过 8750 的概率足够高。