

《Rectangle Painting》解题报告

杭州学军中学 孙梓航

2025 年 9 月 21 日

1 题目大意

存在一个在左、右和向上方向无限的单元格网格（所有坐标满足 $x \in \mathbb{Z}$, $y \geq 0$ 的单元格 (x, y) 均存在）。初始时所有单元格均为白色。你需要处理 q 次两种类型的查询：

1. $y_i \ l_i \ r_i$: 将所有满足 $l_i \leq x \leq r_i$ 的单元格 (x, y_i) 涂黑。如果单元格已经是黑色，颜色不会改变。
2. $l_i \ r_i$: 考虑所有 x 坐标在区间 $[l_i, r_i]$ 内的单元格，找到最高的单元格，使得其正下方的所有单元格均为黑色。形式化地说，需要找到最大的 h ，使得 $\exists x \in [l_i, r_i]$, 满足 $\forall y \in [0, h)$ 单元格 (x, y) 均为黑色。

为了强制在线处理查询，这些查询使用之前的答案进行加密。

2 数据范围

$1 \leq q \leq 10^5$, 解密后 $0 \leq y_i \leq 2 \cdot 10^5$, $0 \leq l_i \leq r_i \leq 2 \cdot 10^5$ 。

3 解题过程

首先对每一行维护一个 set，记录该行白色连续段，并以此将涂黑操作修改成不超过 $2q$ 次不交区间。

然后我们对 x 坐标建立线段树。假设节点 v 对应的区间是 $[v.l, v.r]$ ，我们现在将为（节点，高度）对引入一个颜色系统。

- 高度 y 对于节点 v 是白色的，当且仅当高度 y 上区间 $[v.l, v.r]$ 的所有单元格都是白色的。
- 高度 y 对于节点 v 是黑色的，当且仅当高度 y 上有一次涂黑操作完全覆盖了区间 $[v.l, v.r]$ 。
- 否则，高度 y 对于节点 v 是灰色的。

特别地，我们再定义：

- 高度 y 对于节点 v 是**亮白色**的，当且仅当高度 y 对于节点 v 是**白色**的，且节点 v 为线段树的根节点或节点 v 的父亲节点是**灰色**的。

接下来，观察查询操作，发现求的其实是一些连续的列中，最低白色单元格的最高高度。

对于具体的某一行，找到该行在线段树上对应的从叶子节点到根节点的一条链。我们发现，这条链上对于该行的某个白色单元格对应的高度是**白色**的节点，对应于一个包含叶子节点的区间，也就是其中恰好有一个节点对于该高度是**亮白色**的。

假如我们对于线段树上的每个节点都维护一个 set，记录对于该节点是**亮白色**的高度，那么我们就可以使用子节点答案的最大值和本身 set 中高度的最小值来更新当前节点的答案。

接着，考虑进行涂黑操作，假设操作高度为 y 。我们发现，对于递归到的线段树节点，如果高度 y 对于该节点原来是**亮白色**的，若该节点未被完全覆盖，可以直接把它下传到子节点，然后递归子节点去进一步处理。

对于询问操作，查询结果的合并和节点信息的合并其实并没有差别。

时间复杂度 $\Theta(q \log_2^2 q)$ ，空间复杂度 $\Theta(q \log_2 q)$ 。

4 参考资料

Petrozavodsk Winter 2021. Day 5. Almost Retired Dandelion Contest Tutorial (en)