

《Mausoleum》解题报告

杭州学军中学 孙梓航

2025 年 9 月 21 日

1 题目大意

时间限制：0.3 秒

国王 Geo III 的陵墓是一个巨大的石结构，形状为直方图。直方图是一个简单的直线多边形，其边界由两条链组成：一条是相对于水平轴单调的上链，另一条是下链，即一条水平线段，称为基线段（参见图 E.1）。

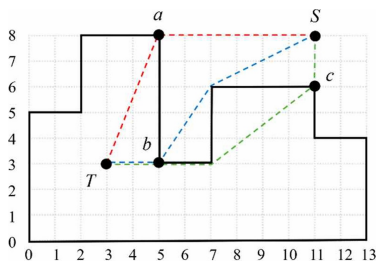


图 E.1. 一座陵墓以及 S 和 T 之间的一些路径

据传言，有一个隐藏的宝藏位于这座陵墓内的某处。著名的宝藏猎人 Metry 已经发现了宝藏位于点 T 。Metry 的计划是打破陵墓的墙壁，进入并带回宝藏。她将从陵墓外的一个特定位置 S 开始。使用她的设备，Metry 只能钻透一个点，该点对应于陵墓边界上的一个顶点。由于在所有顶点处钻透墙壁所需的时间相同，因此最小化时间的关键是找到从 S 到 T 的最短路径。

图 E.1 展示了一个陵墓以及几条从 S 到 T 的可能路径，其中顶点仅被穿透一次。通过顶点 a 的路径总长度为 $11.385165 \approx 6 + \sqrt{29}$ ，通过顶点 b 的路径长度为 $10.077687 \approx \sqrt{20} + \sqrt{13} + 2$ ，通过顶点 c 的路径长度为 $11.0 = 2 + \sqrt{25} + 4$ 。其中，最短路径是通过顶点 b 。

给定陵墓的边界以及 S 和 T 的位置，编写一个程序来找到从 S 到 T 且仅穿透一个顶点的最短路径长度。

输入

你的程序将从标准输入读取。输入的第一行包含一个整数 n ($4 \leq n \leq 10^5$)，其中 n 是偶数，表示代表陵墓的直方图的顶点数。第二行给出 n 个整数 v_1, v_2, \dots, v_n ($v_1 = v_n = 0, 0 \leq v_i \leq 10^6$)，这些整数表示垂直边的 x 坐标和水平边的 y 坐标。当你从基线段的左端到右端遍历直方图的上链时，垂直边和水平边交替出现。每条边的长度至少为 1，且 x 坐标按严格递增的顺序给出。最

后一行包含四个整数 s_x, s_y, t_x, t_y ($-10^6 \leq s_x, s_y \leq 2 \times 10^6, 0 < t_x, t_y < 10^6$), 其中 (s_x, s_y) 和 (t_x, t_y) 分别对应点 S 和 T 。注意, S 是直方图外部的一个点, 而 T 是直方图内部的一个点, 且两者都不在边界上。

输出

你的程序应写入标准输出。恰好输出一行。该行应包含一个实数值, 即从 S 到 T 的最短路径长度。你的输出 z 应格式化为整数部分、小数点和小数部分, 并且当满足 $a - 10^{-3} < z < a + 10^{-3}$ 时将被判定为“正确”, 其中 a 表示评审团的答案。两点 $p = (x_1, y_1)$ 和 $q = (x_2, y_2)$ 之间的欧几里得距离为:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

2 数据范围

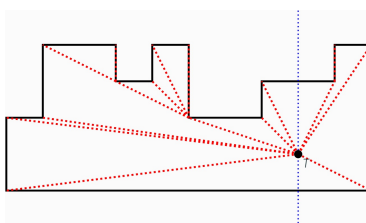
$4 \leq n \leq 10^5, 0 \leq v_i \leq 10^6, v_1 = v_n = 0, -10^6 \leq s_x, s_y \leq 2 \times 10^6, 0 < t_x, t_y < 10^6, n$ 是偶数, 每条边的长度至少为 1。

3 解题过程

根据输入确定陵墓的 n 个顶点, 从原点开始按顺时针方向分别记为 P_1, P_2, \dots, P_n 。

假如对于每个顶点 P_i , 都求出了从 S 到该点不穿过墙壁的最短路径长度 $\text{dist}(S, P_i)$ 和从该点到 T 不穿过墙壁的最短路径长度 $\text{dist}(P_i, T)$, 那么答案等于 $\min_{i=1}^n \text{dist}(S, P_i) + \text{dist}(P_i, T)$ 。

首先考虑求 $\text{dist}(P_i, T)$ 。如下图, 过 T 作一条平行于 y 轴的直线。



由于图形是一个直方图, 容易发现, 直线左侧的点到 T 的路径总是形如逆时针旋转, 而直线右侧的点到 T 的路径总是形如顺时针旋转。因此单独考虑一侧, 路径经过某一点的起点形成一段连续的区间, 且整个图形呈树状。可以递归建树, 每次判断下一个点是否在当前子树内, 不在就回溯。

