

## 4 Ten Ranges (QOJ12320)

### 4.1 题目大意

$n$  组询问  $[l, r]$  内一共有多少整数，满足其十进制表示下所有子序列均不为素数。  
时间限制 2 s，空间限制 512 MB。

[题目链接](#)

### 4.2 数据范围

对于所有数据，

- $1 \leq n \leq 10, 1 \leq l \leq r \leq 10^{18}$ 。

### 4.3 使用算法

有限状态自动机，数位 dp

### 4.4 解题过程

定义一个整数  $a$  被一个整数  $b$  包含，为  $a$  的十进制表示为  $b$  的十进制表示的子序列，记作  $a \triangleleft b$ 。  
定义  $S$  为所有素数构成的集合，定义  $M(S) = \{a \in S \mid \forall b \in S \wedge b \triangleleft a, a = b\}$  为素数的极小集合。

这里直接给出结论：

$$M(S) = \{2, 3, 5, 7, 11, 19, 41, 61, 89, 409, 449, 499, 881, 991, 6469, 6949, 9001, 9049, 9649, 9949, 60649, 666649, 946669, 60000049, 66000049, 66600049\}$$

结论的证明与本题无太大关系，暂时跳过。

#### 解法 1

我们建立自动机节点  $f_{\vec{a}}$ ，其中  $\vec{a}$  是一个 26 维向量，代表了当前自动机匹配  $M(S)$  中的字符串分别匹配到了哪个位置。

自动机间的转移则是枚举  $M(S)$  中所有元素，如果找到了匹配上的字符则将  $\vec{a}$  对应元素自增，如果该状态完整匹配了一个字符串则视作终止状态。

建立自动机后可以发现可到达的状态总数为  $N = 149571$ ，将自动机节点作为数位 dp 的维度即可，时间复杂度为  $O(nN \log_{10} r)$ 。

#### 解法 2

我们对每个  $M(S)$  的元素单独建立链状自动机，之后将所有自动机使用笛卡尔积合并，在合并的过程中需要使用自动机最小化算法。最终结果的自动机节点数量只有  $N = 18$ ，将自动机节点作为数位 dp 的维度即可，时间复杂度为  $O(nN \log_{10} r)$ 。

### 4.5 参考资料

[OEIS A071062](#)

[J. Shallit, Minimal primes, J. Recreational Mathematics, vol. 30.2, pp. 113-117, 1999-2000.](#)

[XIX Open Cup: GP of Gomel - Commentets](#)