1 One Goal

1.1 题目来源

Petrozavodsk Winter 2019. Day 5. Gennady Korotkevich Contest 4 Problem A[1].

1.2 题目大意

你有一棵 n 个点的有标号无根树，点从 $1 \sim n$ 标号。定义 $d(u, v)$ 表示树上 u 和 v 两个节点之间唯一简单路径的边数。

你有 k 个朋友，第 i 个朋友初始在 a_i 号节点上。你需要选择一个节点 v，使得 $\sum d(v, a_i)$ 最小。如果有多个最小值，选择 v 最小的一个。

但是你现在并不知道所有朋友的初始位置。你需要求对于所有 n^k 个长度为 k，值在 $1 \sim n$ 之间的整数序列 a，求出其对应最小的 v 的和。输出答案对 $998,244,353$ 取模的结果。

1.3 数据范围

对于所有数据，满足 $2 \le n, k \le 30000$。

1.4 解题过程

定义 $sz(x, y)$ 为以 x 为根时，有根树中 y 节点的子树内人的数量。

定义树的带权重心，为所有满足以下条件的点 u 所构成的集合：

- 对于所有与 u 相邻的节点 v，都有 $sz(u, v) \le k/2$。

将 $\sum d(v, a_i)$ 该式的值拆分到每条边上计算贡献，即统计每一条边被多少对 (v, a_i) 经过。容易发现该式子即为 $\sum_{x \ne v} sz(v, x)$。

首先考虑 a 序列固定的情况。令选择的 v 节点为中心点。若当前中心点在 x，考虑一个与其相邻的节点 y。当中心点从 x 移动到 y 时，贡献变化量为 $sz(y, x) - sz(x, y)$。由于 $sz(x, y) + sz(y, x) = k$，因此贡献变化量也等于 $k - 2 \cdot sz(x, y)$。

对于最优的中心点 x，必然满足其每一个相邻节点 y，都有 $k - 2 \cdot sz(x, y) \ge 0$。该条件与树的带权重心定义恰好相符。因此上述式子值最小的点就是树的带权重心。

回顾此题定义，若树有多个带权重心，则需求出其中点编号最小的一个。

容易发现一棵树的所有带权重心构成一个树上的连通块。进一步可以证明所有带权重心恰好构成一条链。

[1] https://qoj.ac/contest/2102/problem/12311

证明：若所有带权重心构成的连通块不是一条链，那么必然存在一个如下的子结构：存在四个点 a, b, c, d，满足 $(a, b), (a, c), (a, d)$ 三条边均存在。根据定义，$sz(b, a) \le k/2, sz(a, b) \le k/2$，由于 $sz(b, a) + sz(a, b) = k$，因此 $sz(a, b) = sz(b, a) = k/2$。

同理，有 $sz(a, c) = k/2$ 与 $sz(a, d) = k/2$。此时 $sz(a, b) + sz(a, c) + sz(a, d) = \frac{3}{2}k > k$，矛盾。

接下来需要对所有 n^k 种情况计算答案求和。计算每一条链成为最终带权重心集合的方案数。

首先考虑链长 ≥ 2 的一般情况。令这条链为 $v_1, \ldots, v_m$（$m \ge 2$），观察发现所有 k 个点中，需要有恰好 $k/2$ 个点落在以 v_m 为根时 v_1 的子树内，另外 $k/2$ 个点落在 v_1 为根时 v_m 的子树内。

以 v_m 为根时 v_1 的子树为例，由于 v_1 是带权重心集合对应链的端点，因此所有 $k/2$ 不能在 v_1 的同一个儿子的子树内。方案数为 $sz(v_m, v_1)^{k/2} - \sum_{x \in son(v_1)} sz(v_m, x)^{k/2}$。至此得到一个 $O(n^2)$ 复杂度的做法。

优化考虑按照编号从大到小考虑每个点，设当前扫描到节点编号为 u，使用并查集维护只包含 $\ge u$ 的点所构成的连通块。每次统计 u 是链上最小值的所有链的方案，只需要把 u 的所有邻居中节点编号 $\ge u$ 的点信息进行合并即可。使用并查集维护所有节点的连通性，与每个连通块往外每个子树大小的 $k/2$ 次幂之和即可。该部分复杂度容易做到 $O(n \log n)$。

最后计算带权重心只有一个点的特殊情况。令这个点是 u，需要计算的就是 u 是一个带权重心的方案数（并不需要保证 u 是唯一的，因为在计算 $m \ge 2$ 的情况时容易同时删去链上所有点的贡献）。限制即为其所有邻居子树的大小均 $\le k/2$。

考虑容斥原理，由于至多只会有一个子树的大小 $> k/2$，因此可以用所有方案除去存在一个子树大小 $> k/2$ 的方案。总方案数即为 n^k，容斥掉的方案需要枚举子树大小 $> k/2$ 的子树，设为 v，方案数为 $\sum_{i > k/2} sz(u, v)^i \cdot (n - sz(u, v))^{k-i} \cdot \binom{k}{i}$。直接计算复杂度为 $O(n^2)$。

观察到该式子为关于 $sz(u, v)$ 的 $k + 1$ 次多项式，使用二项式定理将其展开后容易求出多项式的每一项，随后使用一次多项式多点求值即可将所有 $sz = 0, \ldots, n$ 时该式子的值求解出来。瓶颈在于多项式多点求值，复杂度 $O(n \log^2 n)$。

知道多项式每一项系数之后直接 $O(n^2)$ 计算每一项点值，复杂度 $O(n^2)$ 但常数较小，亦可直接通过。

1.5 参考资料

无。