

3 Simple APSP Problem

3.1 题目来源

Petrozavodsk Winter 2018. Day 3. AtCoder Contest Problem I³

3.2 题目大意

有一个 $n \times m$ 的网格图，有 k 个格子不能经过。每一步可以向上下左右四个方向移动一步，求 $\binom{nm-k}{2}$ 种选择两个格子的方案中，每种方案两个格子的最短路径长度的和。

3.3 数据范围

对于所有数据，满足 $1 \leq n, m \leq 10^6, 0 \leq k \leq 30$ 。保证任意两个可经过的格子都互相可达。

3.4 解题过程

这个网格图中的不能经过的格子十分稀疏，这启发把不重要的格子简化。

考虑如果存在相邻的两行 $i, i+1$ 都没有格子不能经过，那么如果从 i 及以上的行到 $i+1$ 及以下的行必须经历一次 i 到 $i+1$ 的过程；从另一方面讲，如果经过了超过一次，那么可以把这样的路径掰直从而减少路径长度。于是可以简单地计算出所有情况下从 i 到 $i+1$ 的贡献和，然后把这些边的边权变成 0，也就是合并两行。

对列进行同样的操作。经过了上面一系列的合并，整个图只剩下最多 $2k+1$ 行和 $2k+1$ 列。注意此时每个格子都代表着一个原本的格子集合，需要维护集合的大小。

$2k+1 \leq 61$ ，这已经足够小，可以暴力解决。以每个点为起点进行广度优先搜索 (bfs) 即可求出这张新图上的所有最短路信息。单次求最短路是 $O(k^2)$ 的，总共有 $O(k^2)$ 个起点，所以最终时间复杂度为 $O(k^4)$ ，可以通过本题。

3.5 参考文献

无。

³<https://qoj.ac/problem/11629>