

2 Construct a point

2.1 题目来源

Petrozavodsk Winter 2018. Day 3. AtCoder Contest Problem C²

2.2 题目大意

有一个平面上的整点三角形。给你三个顶点 $(x_i, y_i) (i \in \{0, 1, 2\})$ ，求出这个三角形内部（不包含边上和角上）任意一个整点或报告不存在。多组询问。

2.3 数据范围

对于所有数据，满足 $|x_i|, |y_i| \leq 10^9, T \leq 10^4$ 。

2.4 解题过程

平面中的任意三角形难以处理，所以需要一些转化。

考虑一种对平面上所有点的“拉伸”变换 $y \leftarrow y + px + q (p, q \in \mathbb{R})$ ，接下来证明经过这样的变换后，直线和点的关系不变。考虑任意一条不垂直于 x 轴的直线 $y = kx + b$ ，会变换成 $y = (k + p)x + b + q$ ；一个点 (u, v) 经过变换会变成 $(u, v + pu + q)$ 。若 $ku + b > v$ ，则原本直线在点的上方，反之亦然，而变化后同样有 $(k + p)u + b + q > v + pu + q$ ，所以直线和点的关系不变。

同样的，进行变换 $x \leftarrow x + py + q (p, q \in \mathbb{R})$ 也不会改变直线和点的关系。而同时考虑三角形的三条边，可以简单证明一个三角形内的点经过变换仍然在三角形内，反之亦然。那么现在可以进行多次这样的变换和翻折变换，把三角形变成容易处理的样子。

首先进行变换 $x \leftarrow x - x_0, y \leftarrow y - y_0$ ，可以把 (x_0, y_0) 平移到坐标原点。

然后对于 (x_1, y_1) ，如果能把它变换到坐标轴上会更好处理。翻折成 $x_1, y_1 > 0$ 的情况，交替进行变换 $y \leftarrow y - \lfloor \frac{y_1}{x_1} \rfloor x$ 和 $x \leftarrow x - \lfloor \frac{x_1}{y_1} \rfloor y$ ，进行一个类似欧几里得算法的效果，最终在 $O(\log V)$ 步内， (x_1, y_1) 会被变换到坐标轴上。

这里需要分析：虽然 x_1, y_1 都在减小，但是 x_2, y_2 可能会因此变得非常大。考虑 $x_1 + y_1$ 和 $|x_2| + |y_2|$ 的变化过程。最初， $x_1 + y_1$ 和 $|x_2| + |y_2|$ 都是 $O(V)$ 的。当进行变换 $y \leftarrow y - px (p = \lfloor \frac{x_1}{y_1} \rfloor \neq 0)$ 时，设 $y_1 = px_1 + v$ ，容易发现 $v \in [0, x_1)$ ，那么

- $x_1 + y_1 = (p + 1)x_1 + v, x'_1 + y'_1 = x_1 + v, \frac{x'_1 + y'_1}{x_1 + y_1} = \frac{x_1 + v}{(p + 1)x_1 + v} \leq \frac{2}{p + 2}$;
- $|x'_2| + |y'_2| \leq |x_2|(p + 1) + |y_2| \leq (|x_2| + |y_2|)(p + 1), \frac{x'_2 + y'_2}{x_2 + y_2} \leq p + 1$;

而 $x_1 + y_1 \geq 1$ 。为了让 x_2, y_2 变得尽可能大，需要最大化 $\frac{\log(p + 1)}{\log(p + 2) - \log 2}$ 。当 $p = 1$ 时取到最大值 $\frac{1}{\log_2 3 - 1} \approx 1.71$ 。那么 $|x_2| + |y_2|$ 最大不超过 $V \times V^{1.71} < 10^{25}$ ，可以使用 `__int128` 来存储。

²<https://qoj.ac/problem/11623>

现在经过变换, 有 $x_1 y_1 = 0$ 。继续进行变换, 使得 $y_2 > x_2 \geq 0, x_1 > 0, y_1 = 0$, 这一步容易完成。那么此时, 三角形中和原点相连的两条边都允许 $(1, 1)$ 在三角形内, 只有边 $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ 可能不允许 $(1, 1)$ 在三角形内, 这可以直接判断。而如果 $(1, 1)$ 不在三角形内, 由于 $x_1, y_2 \geq 1$, 那么所有可能的直线都被限制在 $\min(x, y) \leq 1$ 内, 不可能包含任何整点, 直接返回无解即可。

最终, 选择 $(1, 1)$ 作为答案, 然后在逆序还原所有进行过的变换即可得到真实答案。总共有 $O(\log V)$ 次变换, 总时间复杂度 $O(T \log V)$ 。

本题还有使用类欧几里得算法并二分的算法, 时间复杂度为 $O(T \log^2 V)$, 常数过大, 难以通过, 这里略过。

2.5 参考资料

无。