1 Colorful Doors

1.1 题目来源

Petrozavodsk Winter 2018. Day 3. AtCoder Contest Problem B[1]

1.2 题目大意

有一座长度为 $2n+1$ 的桥。上面有 n 对传送门将桥均分为 $2n+1$ 段。小 S 从桥的左侧出发，不断向右走，并将经过的路面全部涂黑，直到离开桥。当小 S 碰到传送门的左侧时，会被瞬间传送到与之配对的传送门的右侧。

现在你不知道传送门是如何配对的，但是你知道被小 S 涂黑的路面有哪些。你需要构造一种配对传送门的方案或报告无解。

1.3 数据范围

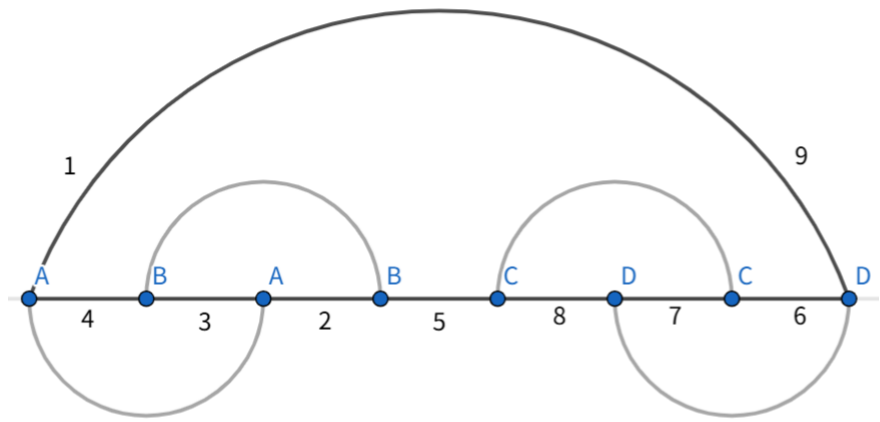
对于所有数据，满足 $1 \le n \le 10^5$。

1.4 解题过程

把桥首尾相接，这样小 S 会从桥的左侧出发并最终回到起点。整个桥被传送门分割成了若干个环。

首先考虑所有路面全部被涂黑的情况，此时题目要求只有一个环。

- 当 $n=2k$ 时，可以使用构造：$1,2,1,2,3,4,3,4,\ldots$，其中相等的数字代表配对的传送门；
- 当 $n=2k+1$ 时，可以证明不存在合法的构造，进行归纳证明：当 $n=1$ 时，唯一一种方案有两个环；当 n 增加 1 时，插入一对传送门，考察传送门两侧的位置，如果在同一个环内，那么传送门会将它们分割开，否则传送门会将它们合并。所以，环的个数的奇偶性一定会发生变化，所以当 $n=2k+1$ 时环一定有偶数个，无法满足条件。



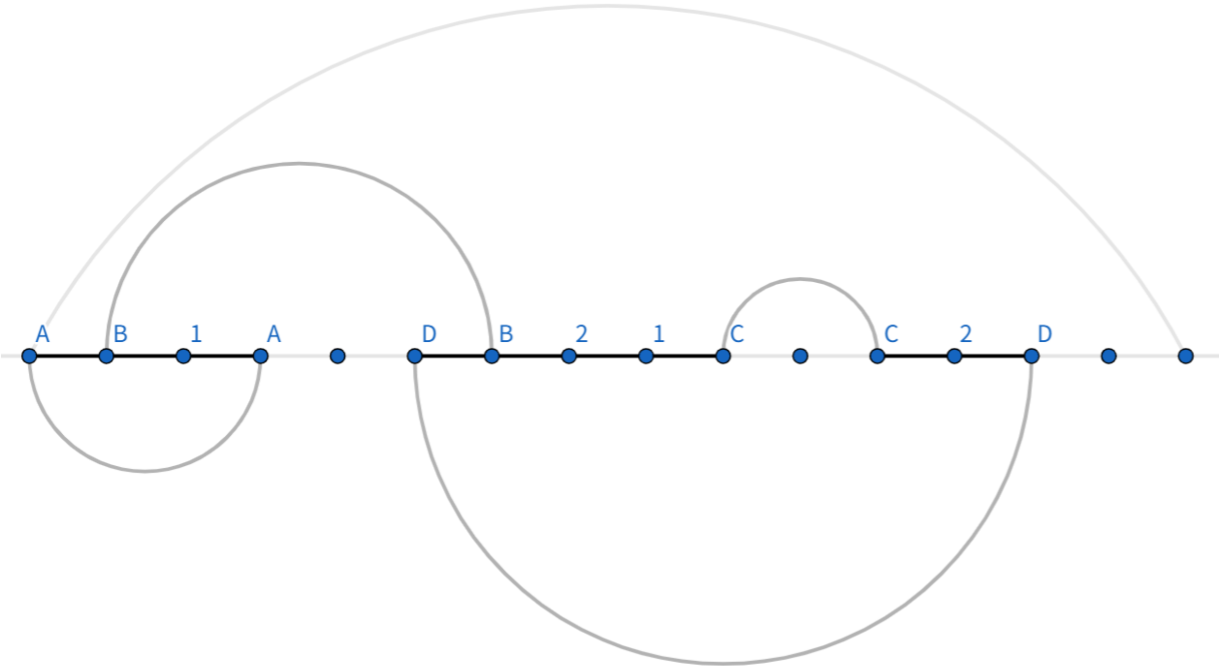
上图是 $n=2k=4$ 的构造，数字是小 S 经过的顺序，相同的字母表示配对的传送门。

现在尝试解决一般的情况。称两侧都被涂黑的传送门为好点，恰有一侧被涂黑的点为界点。为实现方便，可以进行循环位移让 $2n$ 到 1 不用经过。提前把两侧都没有涂黑的点任意匹配。

[1] https://qoj.ac/problem/11622

可以证明，好点一定和好点匹配，界点一定和方向相反的界点匹配。这是因为如果一个点的一侧被经过，那么与其配对的点的另一侧也会被经过。此时需要考察好点的数量 t。

- 当 t 为奇数时，根据上面的说明，此时没有匹配好点的方案，也就没有任何合法方案；
- 当 $t = 4k$ 时，依次匹配所有界点来让所有涂黑部分形成一个环。此时好点个数 t 就是环上的点的个数，使用上面全部涂黑的构造即可；
- 当 $t = 4k + 2$ 时，如果所有好点在同一个联通块内，其他的界点无法提供额外的好点的匹配方式，可以和上面 $n = 2k + 1$ 一样证明无解；否则找到任意两个不在同一联通块的好点并把它们匹配，此时消耗了两个好点，而由于两个好点不相连，可以把其中一个好点所在的联通块首尾相连，这样仍然保持了环的性质，并且好点个数变为了 $4k$，于是剩余部分可以继续套用 $n = 2k$ 的方案。



上图是一种 $t = 6$ 的构造。A 和 B 传送门将最左联通块插在了中间联通块的 B 处，剩下形成的环有 4 个好点，使用了 $n = 2$ 的构造 $1, 2, 1, 2$。

这样就完成了这道题的构造。

1.5 参考资料

无。