3 QOJ11627

3.1 题目大意

给定 a, b, c, A, B, C。

求把大小为 $A \times B \times C$ 的大长方体划分为大小为 $a \times b \times c$ 的小长方体的方案数。对 $10^9 + 7$ 取模。

这里，x, y, z 坐标是分别在 $\bmod A, B, C$ 意义下的。

3.2 数据范围

$1 \le a, b, c, A, B, C \le 100$。

3.3 解题过程

首先显然的 A, B, C 要分别是 a, b, c 的倍数。否则是无解的。

首先我们解决二维的问题，即 $C = c = 1$。

如果有两个相邻的小矩形没有完全对齐。那么我们确定其他全部剩余的小矩阵的位置。于是这表明我们可以找一条平行于 x 或者 y 的直线，使得其不穿过任意一个小矩阵内部。这个是容易计数的。

我们考虑三维的问题。对于一类划分是“平凡的”，当且仅当存在一个平行于 xy, yz 或者 zx 的平面，他们不穿过任意一个小长方体内部。对于平凡的情况，是容易计数的。注意不要重复计算，需要用到容斥原理。

然后我们对非平凡的情况进行计数。

对于一个小长方体 $\{((x+i) \bmod A, (y+j) \bmod B, (z+k) \bmod C) | 0 \le i < a, 0 \le j < b, 0 \le k < c\}$，我们给 $((x+i) \bmod A, (y+j) \bmod B, (z+k) \bmod C)$ 这个位置写上 k。

记位置 (x, y, z) 上面写的数是 $v(x, y, z)$。那么 $v(x, y, 0), v(x, y, 1), \ldots, v(x, y, C-1)$ 是 $(0, 1, 2, \ldots, c-1)$ 重复 $\frac{C}{c}$ 次的一个循环位移。

记 $v(x, y) = v(x, y, 0)$。我们想要知道哪些 $v(x, y)$ 能对应至少一种非平凡的情况。

我们称 z 相同的 $v(x, y, z)$ 构成一层。首先 $v(x, y)$ 不会全部相等，否则会变成平凡的情况。

我们需要把第 $0, c, 2c, \ldots, C - c$ 层，每一层选择一种划分，每个划分出来的小矩形的 v 需要相等。并且存在一层只能横向划分，也存在另一层只能竖向划分。

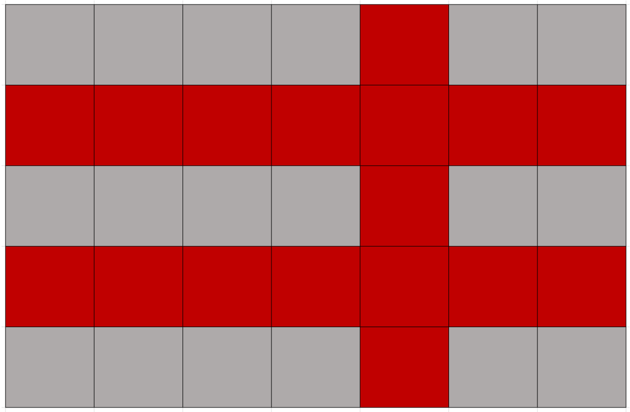
我们可以发现 $v(x, y)$ 能整齐地划分成若干 $a \times b$ 的小矩形，每个矩形内的 v 相等。不失一般性的，我们可以认为 $(0, 0)$ 是一个矩形的右上角。

我们把 $A \times B$ 的矩形缩成了 $\frac{A}{a} \times \frac{B}{b}$ 的网格。记 $X = \frac{A}{a}, Y = \frac{B}{b}, Z = \frac{C}{c}$。

存在一种划分使得我们不能使用原来网格的竖线划分，说明这个网格至少有一行的 v 是完全相同的。这样子我们可以给这行的矩形进行循环位移。

同样的，也至少有一列的 v 是完全相同的。

即，网格存在一行、一列的 v 完全相同。不失一般性的，我们可以认为这个值是 0。



红色代表 $v=0$ 的网格

枚举 p,q 表示这个网格中恰有 p 行、q 列的 v 全是 0。计算满足条件的网格数量可以用容斥原理。具体地，假设 $x=X-p, y=Y-P$。那么这个方案数等于：

$$f(p,q)=\binom{X}{p}\binom{Y}{q}\sum_{i=0}^{x}(-1)^i\binom{x}{i}(c^{x-i}-1)^y$$

对一个满足条件的网格，有 $(b^p+a^q-1)^Z-(a^q)^Z-(b^p)^Z+1$ 种非平凡的划分方案。

于是，非平凡的划分方案一共有：

$$abc\sum_{p=1}^{X-1}\sum_{q=1}^{Y-1}f(p,q)\cdot((b^p+a^q-1)^Z-(a^q)^Z-(b^p)^Z+1)$$

瓶颈在于计算 f，时间复杂度是 $O(n^3)$ 的。其中 $n=\max(A,B,C)$。

3.4 参考资料

AtCoder Peterzavodsk Contest 001 解説