

2 QOJ11622

2.1 题目大意

有一座桥，桥上有 $2N$ 个传送门，传送门之间两两配对。当从左边进入一个传送门后，会从这个传送门匹配的另一个传送门的右侧出来。

Snuke 从桥的左边出发，不断往右走，能说明最终会走到桥的右边。同时还记录了对每个 $i = 1 \sim 2N - 1$ ，是否从传送门 i 右侧出来过。

构造一种传送门的匹配的方案，满足他的记录。或者报告无解。

2.2 数据范围

$$1 \leq N \leq 10^5。$$

2.3 解题过程

我们把两岸想象成一个地方，即我们把这个序列变成了环。记作位置 0。

那么，每一个段都会有一个互不相同的后继和前驱。这表明他们形成了若干个置换环。这也就解释了为什么我们能走到对岸。

我们的任务是构造一种放置传送门的方式使得 0 和一些别的元素在一个环内，记作 S 。

首先我们解决 S 为全集：

- 情形 1: N 是偶数。构造 $1, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 4, \dots, N - 1, N, N - 1, N$ 即可。
- 情形 2: N 是奇数，这时无解。这是因为对每对传送门，去除之后相当于交换了两个段的后继，这时环数的奇偶性变化。如果我们逐一去掉所有的传送门，可以推出没有传送门的时候会有偶数个环，而实际上是一个环。导致矛盾。

接下来我们解决 S 不为全集的情况：

假设一个传送门是“内部的”，当且仅当其左右的两段都被经过。一个传送门是“边界的”，当且仅当其左右两段恰好经过一段。那么内部的传送门应当是一一对应的。也就是说内部传送门数量应为偶数。

我们只关心 S 元素在模 $2N$ 意义下组成的极长连续段的长度，这里长度被定义为这个区间内包含了多少内部传送门。每个连续段会对应左右两个边界传送门，我们称之为“左传送门”和“右传送门”。

- 情形 3: 内部传送门有 $4k$ 个。对于两个长度为 x, y 的两个连续段，我们把 x 的右传送门和 y 的左传送门匹配。那么我们就把这两个连续段合并成了一个长度为 $x + y$ 的连续段。我们不断合并，再把最后得到的一个连续段首位相连就回到了情形 1。
- 情形 4: 内部传送门有 $4k + 2$ 个。
 - 如果存在两个长度 ≥ 1 的连续段。假设这两个连续段长度为 x, y 。我们把 x, y 中任意一个内部传送门匹配起来。那么 x, y 就被重新分成了两个长度和为 $x + y - 2$ 的连续段，此时回到情形 3。
 - 否则，每个长度为 0 连续段必须连到一起，这会回到情形 2。是无解的。

2.4 参考资料

[AtCoder Peterzavodsk Contest 001 解説](#)