QOJ 2570

题意简述

一个序列 a 的权值定义为 a 最长上升子序列的长度。

给定长度为 n 的正整数序列 a，求 a 的最长子序列，满足其权值比 a 的权值小。

$1 \leqslant n \leqslant 5 \times 10^5, 1 \leqslant a_i \leqslant 10^9$ 。

题解

下文中用 LIS 代指最长上升子序列。

记 f_i 表示以 i 为结尾的 LIS 长度，$m = \max_{i=1}^{n} \{f_i\}$ 。对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ ，如果 $f_i = f_j$ ，则 $a_i \geqslant a_j$ 。

考虑如下网络流建图：

- $V = \{1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots, 2n, S, T\}, E = E_1 \cap E_2 \cap E_S \cap E_T$ ，其中 E_1, E_2, E_S, E_T 定义见下。
- $E_1 = \{(i, i+n, 1) \mid 1 \leqslant i \leqslant n\}$ ，即对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ ，i 向 $i+n$ 连边，容量 1 。
- $E_2 = \{(i+n, j, \infty) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n, a_i < a_j, f_i + 1 = f_j\}$ ，即对于 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ ，如果 $a_i < a_j$ 且 $f_i + 1 = f_j$ ，令 $i+n$ 向 j 连边，容量为 $+\infty$ 。
- $E_S = \{(S, i+n, +\infty) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, f_i = 1\}$ ，即对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ ，如果 $f_i = 1$ 就令 S 向 $i+n$ 连容量为 $+\infty$ 的边。
- $E_S = \{(i, T, +\infty) \mid 1 \leqslant i \leqslant n, f_i = m\}$ ，即对于 $1 \leqslant i \leqslant n$ ，如果 $f_i = m$ 就令 i 向 T 连容量为 $+\infty$ 的边。

考虑把原问题转化为求最少删多少个数，满足剩下的序列 LIS 长度 $< m$ ，则图 (V, E) 的最小割即为答案。根据最小割最大流定理，等价于对于原序列求最多能选出多少个不相交的 LIS 。

首先，对于一个 LIS p ，显然满足 $f_{p_i} = i$ 。

结论一：记最多能选出 t 个 LIS ，把所有 LIS 按首项位置从小到大排序后第 i 个序列记为 p_i ，则存在一个最优解，满足 $\forall 1 < i \leqslant t, 1 \leqslant j \leqslant m$ ， $p_{i-1,j} < p_{i,j}$ 。

证明：

- 对于一个最优方案，记最小的 i 满足 $\exists j, p_{i-1,j} > p_{i,j}$ ，记最小的 j 满足 $p_{i-1,j} > p_{i,j}$ ，则 $p_{i-1,j-1} < p_{i,j-1}$ 。
- $p_{i-1,j-1} < p_{i,j-1} < p_{i,j}, a_{p_{i-1,j-1}} < a_{p_{i-1,j}} \leqslant a_{p_{i,j}}$ ，则 $p_{i-1,j-1}$ 可以和 $p_{i,j}$ 在同一个 LIS 中。
- $p_{i,j-1} < p_{i,j} < p_{i-1,j}, a_{p_{i,j-1}} \leqslant a_{p_{i-1,j-1}} < a_{p_{i-1,j}}$ ，则 $p_{i,j-1}$ 可以和 $p_{i-1,j}$ 在同一个 LIS 中。
- 于是，可以交换 p_{i-1} 和 p_i 的 $[j,m]$ 部分，这两个序列仍然是 LIS 。
- 经过有限次操作后，必然能得到一种满足条件的方案。证毕。

结论二：对于所有 $1 \leqslant i \leqslant m$ ，记 l_i 为最小的 x 满足 $f_x = i$ 且 x 可能在某一个 LIS 里，则序列 l 是一个 LIS 。

证明：

- 证明 $\forall 1 < i \leqslant m, l_{i-1} < l_i$ ：考虑 l_i 所在的任意一个 LIS ，记其第 $i-1$ 位为 x ，则 $l_{i-1} \leqslant x < l_i$ 。
- 证明 $\forall 1 < i \leqslant m, a_{l_{i-1}} < a_{l_i}$ ：考虑 l_{i-1} 所在的任意一个 LIS ，记其第 i 位为 x ， $l_{i-1} < l_i \leqslant x$ ，则 $a_{l_{i-1}} < a_x \leqslant a_{l_i}$ 。
- 证毕。

根据结论一和结论二，只需要每次找出字典序最小的 LIS p ，然后把满足 $i < p_{f_i}$ 的 i 删掉，递归子问题，直到找不到 LIS ，即可求出答案。

复杂度 $O(n \log n)$ 。

参考资料

无。