QOJ 2568

题意简述

给定 n,m ，在平面直角坐标系上，定义好路径为一个点的序列 $(P_1,P_2,\dots,P_t)$ ，满足 $\forall 1\leqslant i\leqslant t-1,\overrightarrow{P_iP_{i+1}}\in\{(0,1),(1,0)\}$ 。好路径的起点定义为 P_1 ，终点定义为 P_t 。

你需要给坐标在 $[1,n]\times[1,m]$ 内的所有整点标上一个非负整数，记点 P 上的数为 $F(P)$ 。对于一条好路径 $(P_1,P_2,\dots,P_{t-1},P_t)$ ，定义其权值为 $\sum_{i=1}^{t}F(P_i)$ 。

给定 k ，求有多少种标数的方案，满足所有以 $(1,1)$ 为起点， (n,m) 为终点的好路径的权值都 $\leqslant k$ 。答案对 10^9+7 取模。

$1\leqslant n,m,k\leqslant 100$ 。

题解

记 (i,j) 上标的数为 $a_{i,j}$ 。对于 $1\leqslant i\leqslant n,1\leqslant j\leqslant m$ ，记 $f_{i,j}$ 表示 $(1,1)$ 到 (i,j) 的好路径的权值最大值，则 $f_{i,j}=\max(f_{i-1,j},f_{i,j-1})+a_{i,j}$ ，其中 $f_{i,0}$ 和 $f_{0,j}$ 视为 0 。f 满足 $0\leqslant f_{i,j}\leqslant k,f_{i,j}\geqslant f_{i-1,j},f_{i,j}\geqslant f_{i,j-1}$ 。

可以如下建立起合法 a 和合法 f 的双射：

- $a\to f$ ：令 $f_{i,j}=\max(f_{i-1,j},f_{i,j-1})+a_{i,j}$ 。
- $f\to a$ ：令 $a_{i,j}=f_{i,j}-\max(f_{i-1,j},f_{i,j-1})$ 。

则答案就等于合法 f 的个数。

结论：合法的 f 个数等于合法路径组 $(P_1,P_2,\dots,P_k)$ 的个数，其中合法路径组满足

- 每一条路径以 $(0,n)$ 为起点，以 $(m,0)$ 为终点，每次向下或向右走一个单位长度。
- 对于所有 $[0,n]\times[0,m]$ 中的整点 (x,y) ，满足 $\exists 0\leqslant j\leqslant k$ ，使得 $(x+0.5,y+0.5)$ 在路径 P_i 上方当且仅当 $i\leqslant j$ 。

证明：考虑如下 f 和合法路径组的双射：

- 对于 f ，对于所有 $1 \leqslant l \leqslant k$ ，考虑所有 (i,j) 满足 $f_{i,j} \leqslant l$ 而 $f_{i+1,j+1} > l$ ，令 P_l 为把这些点按 $j-i$ 排序后的结果，则 $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ 即为合法路径组。
- 对于路径组 $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ ，令 $f_{i,j}$ 为最大的 k 满足 $(i-0.5, j-0.5)$ 在 P_k 上方。
- 容易验证这是一个双射。

考虑对合法路径组计数。对于路径组 $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ ，用如下方式得到路径组 $(P_1', P_2', \ldots, P_k')$ ：

- 记 $P_i = ((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_t, y_t))$ ，则 $P_i' = ((x_1+i, y_1+i), (x_2+i, y_2+i), \ldots, (x_t+i, y_t+i))$ 。

则条件等价于 P' 中所有路径包含的点互不相交。

问题转化为：对于 $1 \leqslant i \leqslant k$ ，记 $A_i = (i, n+i), B_i = (i+m, i)$ ，求有多少路径组 $(P_1', P_2', \ldots, P_k')$ ，满足 P_i' 是 A_i 到 B_i 每次向下或向右走一个单位长度的路径，且所有路径互不相交。

根据 LGV 引理，答案为

$$\begin{vmatrix} w(A_1,B_1) & w(A_1,B_2) & \ldots & w(A_1,B_k) \\ w(A_2,B_1) & w(A_2,B_2) & \ldots & w(A_2,B_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w(A_k,B_1) & w(A_k,B_2) & \ldots & w(A_k,B_k) \end{vmatrix}$$

其中 $w(A_i, b_j)$ 表示从 A_i 到 B_j 每次向下或向右走一步的路径个数，可以用组合数计算。

复杂度 $O(n+m+k^3)$ 。

参考资料

无。