4 Jealous Split

4.1 题目来源

36th Petrozavodsk Programming Camp (2019 Winter)[1].

4.2 题目大意

给定一个长度为 n 的数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 以及 k，你需要选择 $k-1$ 个断点将数列 a 划分为 k 个连续段。

记划分出的第 i 段的元素和为 s_i，其中最大值为 m_i，你需要保证对于任意 $1 \le i < k$ 均有 $|s_i - s_{i+1}| \le \max(m_i, m_{i+1})$。

输出任意一组方案或输出无解。

4.3 数据范围

保证 $3 \le k \le n \le 10^5$ 且 $0 \le a_i \le 5 \times 10^4$。

4.4 解题方法

我们直接给出构造：在所有将序列 a 划分成 k 个非空连续段的方案中，任取一方案最小化 $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2$，则该方案满足要求。

定理 4.4.1. 上述构造满足对于任意 $1 \le i < k$，均有 $|s_i - s_{i+1}| \le \max(m_i, m_{i+1})$。

证明. 使用反证法，若存在 $1 \le i < k$ 使得 $|s_i - s_{i+1}| > \max(m_i, m_{i+1})$：

- 若 $s_i \ge s_{i+1}$，记第 i 段的最后一个元素为 x。由于 $s_i - s_{i+1} > \max(m_i, m_{i+1}) \ge x$，所以若将 x 从第 i 段移动至第 $i+1$ 段，则第 i 段仍非空，并且 $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2$ 的增量为 $((s_i - x)^2 + (s_{i+1} + x)^2) - (s_i^2 + s_{i+1}^2) = 2x(-s_i + s_{i+1} + x) < 0$，矛盾！
- 若 $s_i < s_{i+1}$，则可类似推得矛盾。

因此，上述命题得证。

现在，我们只需求解最小化 $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2$ 的方案。记 $f(x)$ 表示当 $k = x$ 时 $\sum\limits_{i=1}^{k} s_i^2$ 的最小值，其中 x 为 $1 \sim n$ 之内的整数。

定理 4.4.2. $f(x)$ 具有下凸性。

证明. 在该划分问题中，代价函数 $w(l, r) = \left(\sum\limits_{i=l}^{r} a_i\right)^2$ 显然满足四边形不等式，因此划分的最小代价和 $f(x)$ 关于划分段数 x 下凸。

[1] QOJ 链接：QOJ 12220

因此，$f(x)$ 可以使用 WQS 二分（又名 Aliens Trick）转换为 $\mathcal{O}(\log n + \log \max\{a_i\})$ 次求解 $\min\limits_{i=1}^{n}(f(i) + iw)$，其中 w 为给定参数。

也即，划分一段的代价为其中所有元素的和的平方加 w，现在要将整个序列划分为若干个连续段，需要最小化代价和。

记 g_i 表示将 $1 \sim i$ 的元素划分为若干个连续段的最小代价和，初始时 $g_0 = 0$，且有转移式

$$g_i = \min_{j=1}^{i}\left(g_{j-1} + w + \left(\sum_{k=j}^{i} a_k\right)^2\right)$$

最终答案即为 g_n。若记 S 为 a 的前缀和数组，则有 $g_i = \max\limits_{j=0}^{i-1}(g_j + w + (S_i - S_j)^2) = \max\limits_{j=0}^{i-1}(g_j + S_j^2 - 2S_iS_j) + S_i^2 + w$。由于 S 单调不降，因此该问题可以使用斜率优化做到单次 $\mathcal{O}(n)$ 的时间复杂度。

综上所述，本题在 $\mathcal{O}\left(n(\log n + \log \max\{a_i\})\right)$ 的时间复杂度内得解。

4.5 参考资料

[1] Oleksandr Kulkov (adamant). *Aliens trick, revisited.* Codeforces.

[2] Ildar Gainullin (300iq). Editorial of 300iq Contest, *36th Petrozavodsk Programming Camp (2019 Winter), Day 1.*