

3 Best Subsequence

3.1 题目来源

36th Petrozavodsk Programming Camp (2019 Winter)¹.

3.2 题目大意

给定一个长度为 n 的数列 w_1, w_2, \dots, w_n 以及 k , 你需要选出 k 个下标 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 求出 $\max(w_{i_1} + w_{i_2}, w_{i_2} + w_{i_3}, \dots, w_{i_{k-1}} + w_{i_k}, w_{i_k} + w_{i_1})$ 的最小可能值。

3.3 数据范围

$$3 \leq k \leq n \leq 2 \times 10^5.$$

3.4 解题方法

显然需要二分答案 x , 现在需要进行判定: 是否存在一个下标序列 i 使得对于任意 $p \in [1, k]$ 均有 $w_{i_p} + w_{i_{p \bmod n+1}} \leq x$ 。

可以简单调整证明必然存在一种最优方案使得 w 中的最小值被选中, 故可将 w 中的最小值循环移位到最开头的位置, 显然这不影响答案, 此时我们可以强制第一个数被选中。

将所有数字按照与 x 的大小关系分为两类, 将所有小于或等于 $\frac{x}{2}$ 的数称为小数, 大于 $\frac{x}{2}$ 的数称为大数。

考虑相邻的两个数, 若均为小数则和不超过 x , 若均为大数则和必然大于 x 。

若 w_1 为大数, 则所有数均为大数, 显然无解。

否则, 在确定了所有小数的选取后, 在相邻两个小数 (包括第一个与最后一个) 之间至多选取一个大数, 而这仅与两个小数之间最小的大数加上这两个小数的较小值是否小于等于 x 有关。

由于相邻两个小数之间至多只能再选取一个额外的数字, 因此一定存在一种最优方案选取了所有小数。

此时线性扫描判断相邻两个小数之间能否再插入一个大数即可, 总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ 。

3.5 参考资料

- [1] Ildar Gainullin (300iq). Editorial of 300iq Contest, *36th Petrozavodsk Programming Camp (2019 Winter), Day 1*.

¹QOJ 链接: [QOJ 12212](#)