2 QOJ 10697 Judge Error

2.1 题目大意

给定一张 n 个点的无向简单图，问其是否有恰好一组完美匹配。如果是，输出该完美匹配方案。

2.2 数据范围

$2 \le n \le 2000$，保证 n 为偶数。边数 $m \le \binom{n}{2}$。

2.3 解题过程

2.3.1 算法 1

定理 1 (A. Kotzig, 1959). *若无向连通图 G 有唯一完美匹配 M，则 M 中必存在 G 的割边。*

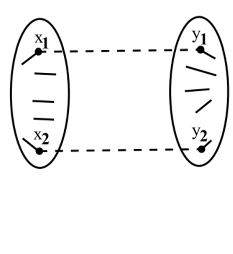
证明. 我们使用反证法证明。

假设 G 是一张边数最少的，满足有唯一完美匹配 M 且其中每条边都不是割边的图。令 $\overline{M} = E(G) - M$ 为不属于匹配的那些边。

首先，如果 $\overline{M}$ 中有割边，那么删掉它之后 G 会分为两个边数更少的连通块。考虑这两个连通块，它们与 M 的交分别形成了完美匹配，而又有 M 中的边都不是割边，因此两个连通块一定都有不止一组完美匹配，从而 G 也不会有唯一的完美匹配，矛盾。

接下来我们讨论 $\overline{M}$ 中没有割边的情形。首先显然每个点都与至少一个 $\overline{M}$ 中的边相邻，而且至少有一个点与其中的两条边相邻（否则 G 为偶环，矛盾）。从而我们知道：$|M| < |\overline{M}|$。

由于 G 已经是边数最小的反例，因此对于任意边 $e \in \overline{M}$，删除 e 后，M 中必须有割边。由鸽巢原理可知，存在 $a_1, a_2 \in \overline{M}$ 使得删除它们中的任意一条后 $b \in M$ 都是割边。设 $a_1 = (x_1, y_1), a_2 = (x_2, y_2)$。$a_1, a_2, b$ 本身都不是割边，因此它们互相切边等价。从而 (a_1, a_2) 也是一组割集：



考虑一张新图，其只保留左侧连通块，并添加边 (x_1, x_2)。对于这张图，它与 M 的交显然是一组完美匹配，设其为 L。同时，如果 L 的任意边在这张图为割边，那么原图上这条边也会是割边。

从而，由于新图的边数严格更少，新图一定有一组不同于 L 的完美匹配。设其为 L'。若 $(x_1, x_2) \notin L'$，那么 $(M - L) \cup L'$ 会是 G 的另一组完美匹配，矛盾。因此 $(x_1, x_2) \in L'$。

与上面对称的，对于右侧，也有一组不同于 R 的完美匹配 $(y_1, y_2) \in R'$。

此时，$(M - L - R) \cup (L' - \{(x_1, x_2)\}) \cup (R' - \{(y_1, y_2)\}) \cup \{a_1, a_2\}$ 是一组与 M 不同的，G 的完美匹配，矛盾。原命题得证。

$\square$

因此，我们可以得到一个简单的算法：不断对这张图跑 Tarjan 算法找到所有的割边。通过这条边分出的连通块大小奇偶性可以判断其是否位于完美匹配内。根据上面的定理，若有解，一定有一条边是位于完美匹配内的，我们删除这两个点并继续做该流程；否则可以直接报告无解。

一共会对该图跑 $\mathcal{O}(n)$ 次 Tarjan 算法，时间复杂度 $\mathcal{O}(n^3)$。难以通过。

2.3.2 算法 2

考虑优化“找到所有割边”这一步。考虑如下的算法：搜索出一棵 DFS 森林，对于所有非树边 (u, v)，标记树上 $u \rightsquigarrow v$ 路径的所有边，最终没有被标记的树边就是原图的所有割边。

首先，搜索出一棵 DFS 森林的部分，可以使用 std::bitset 把时间复杂度优化至 $\mathcal{O}(\frac{n^2}{w})$。只需要每次把未搜索过的点的 bitset 和当前点邻居的 bitset 取与，并找到下一个 1 即可。

接下来是第二部分，考虑异或哈希并树上差分。在一开始为每条边随机一个 $[0, 2^{64})$ 权值 h，然后对于非树边 (u, v)，把 w_u 和 w_v 异或上 $h_{u,v}$。最后对于子树 w 异或和为 0 的点，其连父边就是割边。

我们容易动态维护每个点的所有未被删除的邻边的 h 的异或和。在求 w 的时候，只要把树边的额外贡献去除即可。这部分总时间复杂度优化至 $\mathcal{O}(n)$。因此，总时间复杂度被优化至 $\mathcal{O}(\frac{n^3}{w})$，可以通过。

2.4 参考资料

A short proof of Kotzig's theorem