

1 QOJ 10688 AmazingTalker

1.1 题目大意

有 n 个点，每个点有两个权值 x_i 和 y_i 。需要在这些点之间连一些无向边，构造出一张无向简单图，使得：

- 对每个点 i ，和它相连的点 j 有大于一半满足 $x_j < x_i$ 或 $y_j < y_i$ 。

如果不可能构造出这样的图，那么报告无解。

设构造出的图边数为 m ，那么需要满足 $0 \leq m \leq 3.1416 \cdot n$ 。可以证明如果有解，一定存在合法的图满足该条件。

1.2 数据范围

保证 $1 \leq x_i, y_i \leq n \leq 5 \times 10^5$ 。

1.3 解题过程

1.3.1 算法 1

题目中的限制条件等价于：

- 对于一条边 (u, v) ，如果 $x_v < x_u$ 或 $y_v < y_u$ ，那么 v 将给 u 贡献 1 的权值；否则 v 将给 u 贡献 -1 的权值。 u 对 v 的贡献同理。
- 统计完所有边的贡献后，每个点的权值都必须为正数。

因此，如果有一对 (i, j) 满足 $x_i < x_j \wedge y_i > y_j$ 或 $x_i > x_j \wedge y_i < y_j$ ，那么在这样的 (i, j) 之间连一条边显然是不劣的，因为这将给 i, j 同时贡献 1。

把这样的 (i, j) 都连边后，点 i 的权值为 0 当且仅当对于其他所有点 j 都满足 $x_j \geq x_i \wedge y_j \geq y_i$ 或 $x_j \leq x_i \wedge y_j \leq y_i$ 。

下文中，我们称此时权值为 0 的点为特殊点，此时权值 > 0 的点为非特殊点。

从而，把特殊点按 x 为第一关键字， y 为第二关键字从小到大排序，设为 $\{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ 。则一定有： $x_{c_i} \leq x_{c_{i+1}}$ 且 $y_{c_i} \leq y_{c_{i+1}}$ 。

并且，由于给特殊点贡献 1 的连边，对另一个点的贡献一定是 -1 ，所以每个特殊点的最终权值一定恰好控制到 1 不劣。

根据上面的性质，我们不难观察出这样的结论：

引理 1. 如果有解，那么存在一组解满足任意特殊点之间没有连边。

证明. 我们使用调整法证明。

假如现在有一组不符合该条件的解，设 (c_i, c_j) 是一条 j 最大的连边。

那么，找到对 c_i 贡献为 1 的任意一条边 (x, c_i) ，删除 $(x, c_i), (c_i, c_j)$ ，加入 (x, c_j) ，该解一定仍然合法。

注意到这样调整之后，边数严格减少了，因此我们的调整过程一定会终止，此时即得到任意特殊点之间无边的合法解。□

有了这个结论后，我们可以推出：每个特殊点都只会连接恰好一个对其贡献为 1 的非特殊点。

而注意到，对 c_i 贡献为 1 的非特殊点集合包含了对 c_{i-1} 贡献为 1 的非特殊点集合，从而我们可以按顺序贪心地为每个 c_i 找到其匹配的非特殊点。

具体来说，把所有点按 $x_i + y_i$ 升序排序，按顺序扫描的同时维护指针 p ，指向最前的当前权值 > 1 的非特殊点。当扫描到特殊点时，让其与 p 匹配（若 p 不存在则报告无解），如果 p 权值变为 1 再不断后移 p 直到合法。

该算法的时间复杂度和构造出的边数上界都是 $\mathcal{O}(n^2)$ 的，难以通过。

1.3.2 算法 2

算法 1 的时间复杂度和边数的瓶颈都在于，一开始把所有不劣的 (i, j) 连边。考虑这样的思想：一开始的连边只要让非特殊点恰好够用就好了。

具体来说，先算出一开始把所有不劣的点对连边后每个点的权值 a_i ，这等价于一个二维数点模型，可以使用树状数组 $\mathcal{O}(n \log n)$ 统计。

接下来，用得到的 a_i 跑后面的匹配阶段，算出每个非特殊点实际需要的权值大小 b_i ，这一部分只需要执行算法 1 中所述的排序 + 双指针。

最后，对每个 i 找到和它构成不劣点对的 b_i 条边即可。这依然可以使用树状数组，只需要把原先的计数器改成存储元素的 `std::vector` 即可。时间复杂度分析同普通树状数组， $\mathcal{O}(n \log n + \sum b_i)$ 。

分析 $\sum b_i$ 的量级：设特殊点一共有 k 个，那么 $\sum b_i = (n - k) + k = n$ 。因此，时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n)$ ，最大边数 $m \leq k + \sum b_i \leq 2n \leq 3.1416 \cdot n$ 。

至此，本题得到解决。

1.4 参考资料

暂无。