《Jimp Numbers》解题报告

1 题目大意

定义正整数 k 为好数，当且仅当存在唯一的正整数对 (a,b,c)，满足 $b-a=c-b$，使得 $a^2+b^2+k=c^2$。

给定 n，计算 n 以内的好数个数。

2 数据范围

$1 \le n \le 10^{11}$

3 解题过程

n 是好数等价于存在正整数对 (x,y) 满足 $(x-y)^2+x^2+n=(x+y)^2$。

化简后有 $n=(4y-x)x$，有：

- $x+\frac{n}{x}=4y$ 被 4 整除，
- $y=\frac{x+\frac{n}{x}}{4}<x \Rightarrow x>\sqrt{\frac{n}{3}}$。

启发我们按照 $n \bmod 4$ 分讨。

- 如果 $n \equiv 1 \bmod 4$，$x+\frac{n}{x} \equiv 2$，因此 n 一定不是好数。
- 如果 $n \equiv 2$，x 和 $\frac{n}{x}$ 满足一奇一偶，一定不是 4 的倍数，所以 n 一定不是好数。
- 如果 $n \equiv 3$，总是满足 $x+\frac{n}{x} \equiv 0$，那么要求不存在 n 的因数在区间 $(\sqrt{\frac{n}{3}},n)$ 内。等价于 n 是质数。
- $n \equiv 0$，设 $n=2^u v$, 满足 $u \ge 2$ 且 v 是奇数。设 $x=2^s t, 1 \le s<u, t|v$。继续分类讨论：
  - $u=2, v=1$，此时 $n=4$ 是好数。
  - $u=2, v>1$，此时 $(s,t)=(u-1,v-1)$ 是合法解。要求不存在其他解，设 q 是 v 最小的质因子，那么要求 $\frac{n}{2q}=2^{u-1}\frac{v}{q} \le \sqrt{\frac{n}{3}}$，即 $3n \le 4q$。设 $n=4q^\alpha z$，那么有 $12q^\alpha \le 3n \le 4q \Rightarrow \alpha=1$，$3n=12qz \le 4q \Rightarrow z \le \frac{q}{3} \Rightarrow z=1$。因此 $n=4q$，n 是好数等价于 $\frac{n}{4}$ 是质数。
  - $u=3$，x,y 要么一奇一偶，要么一个 $\bmod 4=2$，一个 $\bmod 4=0$。n 一定不是好数。

- $u=4$，$(s,t)=(u-2,v)$ 一定是合法解，设 q 是 v 最小的质因子，有 $\frac{n}{4q}=2^{u-2}\frac{v}{q}\le\sqrt{\frac{n}{3}}$，同样可以得到 $n=16q$，即 n 是好数等价于 $\frac{n}{16}$ 是质数。
- $u\ge 5$，$(s,t)=(u-2,v)$ 一定是合法解。要求 $(s,t)=(u-3,v)$ 非法，即 $\frac{n}{8}=2^{u-3}v\le\sqrt{\frac{n}{3}}$，解得 $n\le\frac{64}{3}$，由于 $32|n$，因此 n 一定不是好数。

总结上述过程，设 $f_x(n)$ 表示 n 以内满足 $\bmod 4=x$ 的质数个数。答案即为 $f_3(n)+f_1(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)+f_3(\lfloor\frac{n}{4}\rfloor)+f_1(\lfloor\frac{n}{16}\rfloor)+f_3(\lfloor\frac{n}{16}\rfloor)$。

类似 Min_25 筛第一部分。设 p_i 表示第 i 小的质数，$h_x(n,m)$，表示 $1\sim n$ 中，没有被 $p_{1\cdots m}$ 筛去的数中 $\mathrm{mod} 4=x$ 的数的个数。

对于 $n>{p_m}^2$, 有：

- $p_m\equiv 1 \bmod 4$

$$\begin{cases}h_1(n,m)=h_1(n,m-1)-(h_1(\lfloor\frac{n}{p_m}\rfloor,m-1)-h_1(p_m-1,m-1))\\ h_3(n,m)=h_3(n,m-1)-(h_3(\lfloor\frac{n}{p_m}\rfloor,m-1)-h_3(p_m-1,m-1))\end{cases}$$

- $p_m\equiv 3 \bmod 4$

$$\begin{cases}h_1(n,m)=h_1(n,m-1)-(h_3(\lfloor\frac{n}{p_m}\rfloor,m-1)-h_3(p_m-1,m-1))\\ h_3(n,m)=h_3(n,m-1)-(h_1(\lfloor\frac{n}{p_m}\rfloor,m-1)-h_1(p_m-1,m-1))\end{cases}$$

如果 $n<{p_m}^2$，那么已经没有数会被筛去，$h_x(n,m)=h_x(n,m-1)$。

复杂度同 Min_25 筛第一部分，为 $O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$。

4 参考资料

1. 原题链接：`https://qoj.ac/contest/2103/problem/12331`。
2. 原题题解：`https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=2103&r=1`。