《K-Triangles》解题报告

1 题目大意

给定一个 $n \times m$ 的整数矩阵 A 和一个正整数 k。

对于矩阵 A 中的某个单元格 (x_0, y_0)，我们定义以下以 (x_0, y_0) 为中心的 k-三角形单元格集合：

- $T_0 = \{(x, y) : x \geq x_0, y \geq y_0, |x - x_0| + |y - y_0| < k\}$ 当 $1 \leq x_0 \leq n - k + 1$，$1 \leq y_0 \leq m - k + 1$
- $T_1 = \{(x, y) : x \leq x_0, y \geq y_0, |x - x_0| + |y - y_0| < k\}$ 当 $k \leq x_0 \leq n$，$1 \leq y_0 \leq m - k + 1$
- $T_2 = \{(x, y) : x \leq x_0, y \leq y_0, |x - x_0| + |y - y_0| < k\}$ 当 $k \leq x_0 \leq n$，$k \leq y_0 \leq m$
- $T_3 = \{(x, y) : x \geq x_0, y \leq y_0, |x - x_0| + |y - y_0| < k\}$ 当 $1 \leq x_0 \leq n - k + 1$，$k \leq y_0 \leq m$

对于一个给定的 k-三角形 T，定义其权值为 $f(T) = \sum_{(x,y) \in T} A_{x,y}$。

求两个不相交的 k-三角形的权值和最大值。形式化地说，需计算：$\max_{P \cap Q = \emptyset} f(P) + f(Q)$。其中 P 和 Q 是任意两个 k-三角形。

2 数据范围

- $1 \leq n, m, k \leq 1500$
- $-10^9 \leq A_{i,j} \leq 10^9$
- 保证至少存在一对不相交的 k-三角形。

3 解题过程

容易用一些前缀和计数求出以每个单元格为中心的四个三角形的权值，对于两个不相交的三角形来说，一定能用一条横线、竖线、或对角线隔开。对于单元格 (x, y)，可以用 $x, y, x - y, x + y$ 分别描述其投影到 x 轴、y 轴、两条对角线的坐标。

对于每种情况，我们对每个三角形求出其点集内点对应投影坐标的最小值和最大值，然后做一次前缀 max 和后缀 max。枚举分界线更新答案。复杂度 $O(nm)$。

4 参考资料

1. 原题链接：https://qoj.ac/contest/2103/problem/12332。
2. 原题题解：https://qoj.ac/download.php?type=attachments&id=2103&r=1。