3.4 参考资料

[1]AmazingTalker

4 QOJ10693: Flappy Bird 解题报告

4.1 题目大意

在一个 $L \times H$ 的地图中，需要从 $(0, s)$ 走到 (L, t)。同时，有 n 个障碍，第 i 个障碍位于 x_i，覆盖了 $x = x_i, y \in [0, l_i)$ 和 $x = x_i, y \in (r_i, H]$ 中所有点。

计算从起点到终点且不穿过障碍的最短路径的长度。

4.2 数据范围

$n \leq 3 \times 10^5, 1 \leq L, H \leq 10^9, 0 < x_i < L, 0 \leq s, t, l_i, r_i \leq H$。$x_i$ 互不相同。

4.3 解题过程

不妨设 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n, x_0 = 0, x_{n+1} = L$。

任取一条路径 P，设其长度为 $f(P)$。$\forall 1 \leq i \leq n$，假设路径上第一个满足 $x = x_i$ 的点为 (x_i, y_i)。设 $y_0 = s, y_{n+1} = t$。

令路径 P' 为顺次连接 (x_i, y_i) 得到的路径，显然 $f(P) \geq f(P')$，将 P 调整为 P' 一定不劣。

设 $k_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$。

如果最短路径上任意一个 $i(1 \leq i \leq n)$ 满足 $k_{i-1} < k_i$，则必有 $y_i = r_i$；否则，由于 $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{k_{i-1}}{\sqrt{1+k_{i-1}^2}} - \frac{k_i}{\sqrt{1+k_i^2}} < 0$，增大 y_i 可以得到更优的解。

同理，如果最短路径上任意一个 $i(1 \leq i \leq n)$ 满足 $k_{i-1} > k_i$，则必有 $y_i = l_i$。

令 $k = \frac{t-s}{L}$。找出使得 $\frac{y_i - s}{x_i}$ 最大的 $i(1 \leq i \leq n)$，设其为 p（如果有多个满足条件的 i，选择最小的一个）。

如果 $k' = \frac{y_p - s}{x_p} > k$，那么必定有 $k_p \le k'$；否则，$\frac{y_{p+1}-s}{x_{p+1}} > \frac{x_p - s + (x_{p+1}-x_p)k_p}{x_{p+1}} = k_p$，矛盾；同理，必定有 $k_{p-1} > k'$。

因而 $k_{p-1} > k_p, y_p = l_p$。

找出 $\frac{l_i - s}{x_i}$ 最大的 $i(1 \le i \le n)$，设其为 p'（如果有多个满足条件的 i，选择最小的一个）。

如果 $p \ne p'$，则 $y_p = l_p$；然而，$\frac{l_p - s}{x_p} \le \frac{l_{p'} - s}{x_{p'}} \le \frac{y_{p'} - s}{x_{p'}}$，且取等的必要条件是 $p > p'$，矛盾。

所以 $p = p'$。

同理，找出 $\frac{r_i - s}{x_i}$ 最小的 $i(1 \le i \le n)$，设其为 q（如果有多个满足条件的 i，选择最小的一个）。如果 $\frac{r_q - s}{x_q} < k$，那么 $y_q = r_q$。

考虑如下递归算法：

假设目前考虑的子问题需要找出从 (x_s, y_s) 到 $(x_t, y_t)(s < t)$ 的最短路。如果当前子问题中没有任何障碍，即 $t = s + 1$，那么最短路径必定为连接起点和终点的线段；

否则，找出使得 $\frac{l_i - y_s}{x_i - x_s}$ 最大的 $i(s < i < t)$，设其为 p（如果有多个满足条件的 i，选择最小的一个）；找出 $\frac{r_i - y_s}{x_i - x_s}$ 最小的 $i(s < i < n)$，设其为 q（如果有多个满足条件的 i，选择最小的一个）。令 $k = \frac{y_t - y_s}{x_t - x_s}$。

如果 $\frac{l_p - y_s}{x_p - x_s} > k$，令 $y_p = l_p$，向左右两侧递归求解；

如果 $\frac{r_q - y_s}{x_q - x_s} < k$，令 $y_q = r_q$，向左右两侧递归求解；

否则，$\frac{l_p - y_s}{x_p - x_s} \le k$ 且 $\frac{r_q - y_s}{x_q - x_s} \ge k$，最短路径必定为连接起点和终点的线段。

对 (x_0, y_0) 到 (x_{n+1}, y_{n+1}) 的问题进行求解即可得到最终的答案。

区间查询使得 $\frac{l_i - Y}{x_i - X}$ 最大的 i 以及 $\frac{r_i - Y}{x_i - X}$ 最小的 i 可以用线段树维护区间凸包，每次在 $O(\log n)$ 个凸包上二分，单次查询复杂度为 $O(\log^2 n)$；预处理复杂度为 $O(n \log n)$。

总共至多递归求解 n 次，因此总时间复杂度为 $O(n \log^2 n)$。

4.4 参考资料

[1]Flappy Bird