每行可以被划分为至多 3 个连续段，因此矩阵的列可以被划分为至多 $2n+1$ 个连续段使得每个连续段当中所有列相等。

将询问离线下来求解。用平衡树维护插入的行的顺序，之后统计每个连续段中 1 的数量并算出询问所属的连续段。最后，用线段树或平衡树模拟具体的修改过程可以求出每个询问的答案。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

2.4 参考资料

[1]Holes in Queue

[2]2023 KAIST 13th ICPC Mock Competition editorial

3 QOJ10688: AmazingTalker 解题报告

3.1 题目大意

给定 n 个点，第 i 个点有两个权值 $u_i, v_i (1 \le u_i, v_i \le n)$。构造一个以这些点为点集的无向图使得每个点 x 有多于一半的邻居 y 满足 $u_y < u_x$ 或 $v_y < v_x$，或报告无解。

3.2 数据范围

$1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le u_i, v_i \le n$。

构造的方案必须满足 $m \le 3.1416 \cdot n$。

3.3 解题过程

称点 x 对于点 y 是“好点”当且仅当 $u_x < u_y$ 或 $v_x < v_y$，则最后构造的图中每个点的好邻居需要严格多于一半。

构造如下的无向图 $G(V,E)$：$V = \{1,2,3,\dots,n\}, (x,y) \in E \iff (u_x - u_y)(v_x - v_y) < 0$，设 i 号点的度数为 d_i。对于任意两个点 x, y，它们相对于对方来说都是好点当且仅当 $(x,y) \in E$。

设 $S = \{x \mid d_x > 0\}, T = \{x \mid d_x = 0\}$。

将 T 中的元素按照 $u+v$ 从小到大排序，设其为 $a_1 \dots a_t$，显然 $\forall 1 \le i < j \le t$，$u_i \le u_j, v_i \le v_j$。

令数列 b 满足 $\forall x \in S, b_x = 0$ 且 $\forall 1 \le i \le t, b_{a_i} = i$。

引理 1. *如果有解，那么必有至少一组解 $G_0(V, E_0)$ 满足 $\forall (x, y) \in E_1$，如果 $x \in S, y \in T$，则 $u_x < u_y$ 或 $v_x < v_y$。*

证明. 对于任意一组解 $G_0(V, E_0)$，令 $f(G_0) = \sum_{(x,y)\in E_0, x\in S, y\in T, u_x \ge u_y, v_x \ge v_y} b_y$，不妨设 G_0 为一组使得 $f(G_0)$ 最小的解。

假设 $f(G_0) \neq 0$。找出任意一条不满足条件的边 $(x, y) \in E_0$，其中 $x \in S, y \in T$。显然 x 对于 y 是一个坏点。

找出一条边 $(y, z) \in E_0$ 使得 z 对于 y 是一个好点，显然这样的 z 必定存在，$u_z \le u_y, v_z \le v_y$ 并且 $(u_y, v_y) \neq (u_z, v_z)$。

删去 $(x, y), (y, z)$ 之后，连接 (x, z)。容易证明新得到的图 G_0' 必定也是一组解。

如果 $z \in S$，则 $f(G_0') = f(G_0) - b_y < f(G_0)$。否则，$b_z < b_y$，$f(G_0') = f(G_0) - b_y + b_z < f(G_0)$。

综上，有 $f(G_0') < f(G_0)$，矛盾。

所以假设不成立，$f(G_0) = 0$，引理得证。

$\square$

引理 2. *如果有解，那么必有至少一组满足引理 1 中条件的解 $G_0(V, E_0)$ 满足 $\forall (x, y) \in E_0$，如果 $x \in S, y \in S$，则 $(x, y) \in E$。*

证明. 找出所有解当中使得不满足条件的边的数量最少的图 $G_0(V, E_0)$，设其有 k 条边不满足条件。

假设 $k > 0$。任取一条不满足条件的边 $(x, y) \in E_0$，则 $x \in S, y \in S, (x, y) \notin E$。

不妨设 $u_x \le u_y$ 且 $v_x \le v_y$。

将这条边删去之后，如果新图仍然是一组解，则存在不满足条件的边更少的解，矛盾。

否则，因为 $u_x \le u_y$ 且 $v_x \le v_y$，y 相对于 x 不可能是好的。

因此，x 相对于 y 是好的；同时，删去 (x, y) 之后 y 相邻的好点和坏点数量相同。

如果 y 没有相邻点，因为 $y \in S$，所以至少存在一条 $(y,z) \in E$。在图中加入这条边，显然得到的新图是一组解。

否则，必有 $(y,z) \in E_0$ 使得 $u_y \le u_z, v_y \le v_z$。删除 (y,z) 并加入 (x,z)，得到的新图也必定是一组满足引理 1 中条件的解。

通过分类讨论可以得知，无论何种情况下，新图必定有 $k-1$ 条边不满足条件——这与 k 的最优性矛盾。

所以假设不成立，必定存在 $k=0$ 的解。 □

类似地，可以证明：如果有解，那么必有至少一组满足引理 1、引理 2 中条件的解 $G_0(V,E_0)$ ，其中不存在 $(x,y) \in E_0$ 满足 $x \in T, y \in T$。

因此存在一组解 $G_0(V,E_0)$ 满足：对于 $(x,y) \in E_0$（不妨设 $b_x \le b_y$），要么 $(x,y) \in E$，要么 $x \in S, y \in T$ 且 x 相对于 y 是好点。因为 $\forall x \in T$，和它有边连接的节点 y 一定满足 y 对于 x 是好点，但 x 对于 y 不是好点，因此只连接一条边是不劣的。

用如下算法构造一组解：

初始化 $d'_i = 1$，按照 $a_1 \sim a_t$ 的顺序考虑 T 中所有的元素 x：找出所有 $y \in S$ 使得 y 相对于 x 是好点。如果存在 $d'_y < d_y$，连接 (x,y) 并将 d'_y 加上 1；否则，报告无解。

之后，$\forall x \in S$，找出 E 中任意 d'_x 条邻边，将它们加入边集（如果已经在边集当中就跳过）。

容易证明如果算法正常结束，其构造的解一定满足条件，并且满足 $m \le 2n$。否则，必定存在一个 a_i 使得程序报告无解。对于任意的 $1 \le j \le i, u_{a_j} \le u_{a_i}$ 且 $v_{a_j} \le v_{a_i}$，因此如果有 $y \in S$ 使得 y 相对于 a_j 是好点，那么它相对于 a_i 也是好点。找出使得 $y \in S$ 相对于 a_i 是好点的 y 的集合 Y。$\forall 1 \le j \le i$，a_j 连接的节点一定在这个集合内。

然而，程序报告无解，所以一定有 $\sum_{y \in Y}(d_y - 1) < i$，对于任意的连边方案，必定存在一个 $x \in S$ 满足它和至少 d_x 个 T 中的点连了边，并且这些 T 中的点相对于它都是坏点；但是它至多向 S 中的 d_x 个节点连边，所以好点的数量不可能大于一半。因此不可能存在符合条件的连边方案。

预处理 d_i 需要二维数点，使用树状数组维护，时间复杂度为 $\Theta(n \log n)$。