# 2 QOJ10007: Holes in Queue 解题报告

## 2.1 题目大意

给定无限数列 $P = (1, 2, 3, \dots)$。对它进行 $d$ 次操作，每次同时删除 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 这 $n$ 个位置上的元素，得到序列 $Q$。之后进行 $q$ 次询问，每次询问给定 $x$，需要求出 $Q_x$。

## 2.2 数据范围

$n, q \le 5 \times 10^5, a_i, d, x, \le 10^{12}$，$a_i$ 互不相同。

## 2.3 解题过程

首先将 $\{a\}$ 从小到大排序。之后不妨假设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$。

**引理 1.** *假设 $d$ 次操作中 $a_n$ 位置上被删去的数分别为 $t_1 \dots t_d$，则 $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots = t_d - t_{d-1} = n$。*

*同时，假设 $P$ 删去 $t_1 \dots t_d$ 之后得到的序列为 $P'$，对其进行 $d$ 次操作，每次同时删除 $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ 位置上的元素，得到的序列 $Q' = Q$。*

**证明.** 由于 $a_n = \max_{1 \le i \le n} a_i$，每次操作之前 $\forall i \ge a_n, P_{i+1} = P_i + 1$；而操作之后 $P_{a_n+n} = P_{a_n} + n$ 前面恰好被删去了 $n$ 个元素，因此操作后它会处于 $a_n$ 的位置上。

所以相邻两次操作中删去的数之差一定为 $n$，因而 $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \cdots = t_d - t_{d-1} = n$。

下归纳证明：$\forall 0 \le i \le d$，$P$ 进行前 $i$ 次操作后的结果额外删除 $t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_d$ 就能得到 $P'$ 进行前 $i$ 次操作的结果。

$i = 0$ 时显然成立；假设 $i = k - 1$ 时结论成立，$i = k$ 时，$P'$ 和 $P$ 进行前 $k - 1$ 次操作后得到的序列第一个不同的位置位于 $a_n$（也就是 $t_k$ 当前所在的位置），因此前 $a_n - 1$ 个位置都相同，删去的元素也相同，因而 $i = k$ 时结论也成立。 □

显然 $t_d$ 一定是所有被删除的数当中最大的。

因此可以证明，枚举 $i = n \dots 1$，每次删除 $P$ 中处于 $a_i + ik(0 \le k < d)$ 位置上的元素，最后得到的序列就是 $Q$。

为了得到 $Q$ 中每个位置上的值，考虑逆向进行操作，每次插入 $d$ 个元素。

将题面转化为：

- 有一个初始全部为 1 的无限序列 $X$，进行 $n$ 次操作：
- 第一次操作中，在 $a_1$ 位置之前插入 $d$ 个 0；
- 第 $i(2 \le i \le n)$ 次操作中，在 $a_i + (i-1)k(0 \le k < d)$ 位置之前同时插入 0。
- 最终得到序列 $Y$。之后进行 $q$ 次询问，每次给定 $x$ 询问 $Y$ 中第 $x$ 个 1 的位置。

用如下算法构造一个 $n$ 行 $N$ 列的矩阵，其中 $N$ 足够大：

1. 将矩阵初始化为 1 行 $N$ 列的矩阵，其中第 $a_1 \sim a_1 + d - 1$ 个元素为 0，其余位置为 1。第 $i$ 列的元素编号为 $i$。
2. 枚举 $i = 2 \dots n$：
   - 设目前编号为 $a_i$ 的元素位于 $r$ 行 $c$ 列，在第 $r$ 行上方插入新的一行。
   - 将该行的第 $1 \sim c - 1$ 个元素设为 $-1$，$c \sim c + d - 1$ 个元素设为 0，其余元素设为 1。
   - 将所有 0 和 1 按照列号为第一关键字，行号为第二关键字排序并依此重标号。

最后根据编号进行查询即可。

显然每次插入的 0 位置形成满足条件的等差数列。而插入的最后一个 0 是所有 0 位置当中编号最大的，因此在后面插入 1 不会对结果造成影响。因为 $N$ 足够大，所以修改和询问均不会超出范围。

每行可以被划分为至多 3 个连续段，因此矩阵的列可以被划分为至多 $2n+1$ 个连续段使得每个连续段当中所有列相等。

将询问离线下来求解。用平衡树维护插入的行的顺序，之后统计每个连续段中 1 的数量并算出询问所属的连续段。最后，用线段树或平衡树模拟具体的修改过程可以求出每个询问的答案。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

## 2.4 参考资料

[1]Holes in Queue

[2]2023 KAIST 13th ICPC Mock Competition editorial

# 3 QOJ10688: AmazingTalker 解题报告

## 3.1 题目大意

给定 $n$ 个点，第 $i$ 个点有两个权值 $u_i, v_i (1 \le u_i, v_i \le n)$。构造一个以这些点为点集的无向图使得每个点 $x$ 有多于一半的邻居 $y$ 满足 $u_y < u_x$ 或 $v_y < v_x$，或报告无解。

## 3.2 数据范围

$1 \le n \le 5 \times 10^5, 1 \le u_i, v_i \le n$。

构造的方案必须满足 $m \le 3.1416 \cdot n$。

## 3.3 解题过程

称点 $x$ 对于点 $y$ 是“好点”当且仅当 $u_x < u_y$ 或 $v_x < v_y$，则最后构造的图中每个点的好邻居需要严格多于一半。

构造如下的无向图 $G(V, E)$：$V = \{1, 2, 3, \dots, n\}, (x, y) \in E \iff (u_x - u_y)(v_x - v_y) < 0$，设 $i$ 号点的度数为 $d_i$。对于任意两个点 $x, y$，它们相对于对方来说都是好点当且仅当 $(x, y) \in E$。

设 $S = \{x \mid d_x > 0\}, T = \{x \mid d_x = 0\}$。