IOI2026 集训队试题解题报告

上海市实验学校 刘墨涵

2025 年 9 月

1 QOJ10003: Decorative Birds 解题报告

1.1 题目大意

有 n 只鸟，第 i 只鸟的速度为 A_i，可爱程度 C_i，它会在 T_i 时刻出现，$T_i + L$ 时刻离开（其中 L 是一个与 i 无关的常数）。在任意时刻可以选择扔出一份食物。此时如果有至少一只鸟还未离开，则其中 A_i 最大的鸟会取走食物并**立即离开**，同时获得等同于其可爱程度 C_i 的收益。求收益可能的最大值。

1.2 数据范围

$1 \le n \le 3 \times 10^5, 1 \le L \le 10^9$。

$1 \le A_i \le n, |C_i| \le 10^9, 0 \le T_i \le 10^9$。所有 A_i 互不相同。

1.3 解题过程

令 $m = \max_{1 \le i \le n} T_i + L$，显然对于任意的 $1 \le i \le n$ 有 $0 \le T_i \le T_i + L \le m$。不妨假设编号为 i 的鸟的出现时间段为 $[T_i, T_i + L)$。

令 $l_i = T_i + 1, r_i = T_i + L$，则 $l_i \le t \le r_i$ 与“i 号鸟的出现时间包括 $[t-1, t)$”等价。

令 R_i 为唯一满足 $A_p = i$ 的 p。

对于任意的数列 $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)(0 \le x_i \le n, x_i \in \mathbb{Z})$，令 $S(x) = \{p \mid \min_{l_p \le i \le r_p} x_i < A_p\}$。

为了方便论述，不妨假设 $\max\{\} = 0$。

引理 1. *存在一个操作序列使得“得到食物的鸟”的编号构成的集合为 S_0 当且仅当 $\exists x\ s.t.\ S_0 = S(x)$。*

证明. 首先证明充分性。

此时，存在 x 使得 $S_0 = S(x)$。

现在用如下方法构造一个操作序列：枚举 $t = 1 \ldots m$。在 $t - 0.5$ 时刻，如果目前存在 $A_p > x_t$ 的鸟正在等待食物，那么重复投喂食物直到不存在满足条件的鸟。

A_p 更大的鸟优先被投喂，因此可以在投喂所有 $A_p > x_t$ 的鸟的同时不投喂任何 $A_p \le x_t$ 的鸟。对于任意的 $p_0 \in S(x)$，找出最小的满足 $A_{p_0} > x_{t_0}$ 且 $l_{p_0} \le t_0 \le r_{p_0}$ 的 t_0（由 S 函数的定义必定存在这样的 t_0），显然这只鸟在 $t_0 - 0.5$ 时刻被投喂。同理，对于任意的 $p_0 \notin S(x)$，不存在这样的 t_0，因此它不会被投喂。

因此被投喂的鸟的编号构成的集合恰好为 $S(x)$，也就是 S_0。

然后证明必要性。

构造序列 x 满足 $x_i = \max_{l_p \le i \le r_p, p \notin S_0} A_p$。对于所有的 $p \notin S_0$，显然对任意 $l_p \le i \le r_p$ 有 $A_p \le x_i$。假设存在一个 $p_0 \in S_0$ 满足对于任意 $l_{p_0} \le i \le r_{p_0}$ 有 $A_{p_0} \le x_i$。

此时假设这只鸟在时刻 $t_0 \in [t-1, t)(t \in \mathbb{Z})$ 时被喂食。然而 $A_{p_0} \le x_t = \max_{l_p \le t \le r_p, p \notin S_0} A_p$，必定存在一只鸟速度比它更快——与题意矛盾。

因此不存在这样的 p_0，充分性得证。 □

现在考察必要性证明中对集合 S_0 构造的序列 x。设 $x_0 = x_{m+1} = 0$，容易发现 $\forall 1 \le i \le m$，$x_i > x_{i-1} \Rightarrow l_{x_i} = i$ 并且 $x_i > x_{i+1} \Rightarrow r_{x_i} = i$。

引理 2. *在上述条件下，$\forall 1 \le p \le m, p \notin S_0$，存在恰好一个极长连续段 $[s, t] \subseteq [l_p, r_p]$ 满足 $\forall s \le i \le t, x_i < A_p$。*

证明. 这样的连续段显然存在。假设存在 ≥ 2 个极长连续段，则必定存在 $l_p \le u < v \le r_p$ 满足 $x_u < A_p, x_v < A_p$ 且 $x_{u+1} \ge A_p, x_{v-1} \ge A_p$。

令 $k = \max_{u+1 \le i \le v-1} x_i$，设它在 $x_u \dots x_v$ 中第一次出现的极长连续段为 $[s_0, t_0]$。

此时 $x_{s_0} = x_{t_0} = k, x_{s_0-1} < k, x_{t_0+1} < k$。因此 $s_0 = l_k, t_0 = r_k$。

现在 $v - u > t_0 - s_0 = r_k - l_k = L - 1$。然而，$[u, v] \subseteq [l_p, r_p]$，因此 $v - u \le r_p - l_p = L - 1$，矛盾。

因此假设不成立，只存在一个这样的连续段。 □

进而，如果限制 $\forall 1 \le i \le m$，$x_i > x_{i-1} \Rightarrow l_{x_i} = i$ 并且 $x_i > x_{i+1} \Rightarrow r_{x_i} = i$，就可以在每个这样的极长连续段的开头统计 C 对答案的贡献。

用动态规划解决这个问题：设 $f_{i,j}$ 代表只考虑 $x_1 \sim x_i$ 的情况下，$x_i = j$ 的所有序列中可能得到的最大的收益。

令 $g_{i,j} = \sum_{l_p < i \le r_p, A_p > j} C_p, s_{i,j} = \sum_{l_p = i, A_p > j} C_p$。

从 f_{i-1} 向 f_i 有三种转移方式：

- $f_{i,j} \leftarrow f_{i-1,j} + s_{i,j}$
- $f_{i,j} \leftarrow f_{i-1,k} + s_{i,j}(k < j, l_{R_j} = i)$
- $f_{i,j} \leftarrow f_{i-1,k} - g_{i,k} + g_{i,j} + s_{i,j}(k > j, r_{R_k} = i - 1)$

其中第二种和第三种转移都只会出现 n 次。

使用线段树维护同一行中 f_i, g_i 的所有元素。

统计 $s_{i,j}$ 的贡献可以直接统计每个 C 的贡献，转化为对 f 进行区间加操作，这样的操作共有 n 次。对 $g_{i,j}$ 进行修改也可以转化为区间加操作。

需要支持区间查询 $\max\{f_{i,j}\}$，单点查询 $f_{i,j} - g_{i,j}$，区间操作 $f_{i,j} \leftarrow \max\{f_{i,j}, k + g_{i,j}\}$，可以通过懒标记实现。

时间复杂度 $\Theta(n \log n)$。

1.4 参考资料

[1]Decorative Birds

[2]2023 KAIST 13th ICPC Mock Competition editorial