

QOJ12304 Pick Your Own Nim

题目大意

有 n 个正整数 a_1, a_2, \dots, a_n , 还有 m 个正整数集合 S_1, S_2, \dots, S_m 。

你需要从 m 个集合中的每一个 S_i , 选出其中的一个元素 b_i 。同时, 你需要保证在可重集 $\{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_m\}$ 中, 不存在一个 **非空可重子集** 使得其所有元素二进制异或和为 0。

构造任意一组方案, 或者报告无解。

数据范围

- $0 \leq n \leq 60$;
- $1 \leq m \leq 60$;
- 设 k_i 是 S_i 中的元素数量, 保证 $k_i \geq 1$ 且 $\sum k_i \leq 5000$;
- $1 \leq a_i, b_i < 2^{60}$ 。

解题过程

我们可以认为给出的 n 个正整数是另外的 n 个集合, 其中每个集合只有一个对应的元素。

可以发现, 我们实际上是要使得这 $n + m$ 个元素在 \mathbb{Z}_2^V 上线性无关。在本题中, $V = 60$ 。

每个集合中 **最多** 选出一个元素, 这个条件可以写成拟阵 M , 该拟阵的基础集即为这 $n + \sum k_i$ 个正整数, 而其独立集族使用每个集合中最多选一个元素来间接定义。我们容易——验证该独立集族满足拟阵的三条性质。事实上, 该拟阵是一种特殊的划分拟阵。

对于这 m 个元素线性无关这个条件, 同理可得它也描述了一个拟阵, 且该拟阵是经典的线性拟阵。

而题目要求的是每个集合 **恰好** 选出一个元素。可以发现, 此时我们要求的是这两个拟阵的拟阵交, 且期望这个拟阵交最大 (此时它包含 $n + m$ 个元素)。

直接使用求解拟阵交的增广路算法即可。在细节上, 由于第一个拟阵较简单, 我们使用它来隐式构建交换图是更好处理的。每次搜索增广路时, 我们只需判断 $n + m$ 个元素是否线性无关, 每次复杂度是 $O((n + m)V)$; 而在整个增广路算法中, 总共需要判断 $O((n + m)^2)$ 次。

综上, 我们得到了一个时间复杂度 $O((n + m)^3 V)$ 的算法。由于 $n + m > V$ 的情况是简单的, 复杂度也可以描述为 $O(V^4)$ 。

参考资料

[比赛题解](#)

[拟阵 - OI Wiki](#)

[从拟阵基础到 Shannon 开关游戏 - 洛谷专栏](#)