QOJ12305 Permutasino

题目大意

给你一个 n 维空间上的向量 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$。

你需要构造 $k \le n$ 个长度为 n 的排列 $p_1, p_2, \ldots, p_k$，并给每个排列赋一个非负实数权值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$，满足以下条件：

- $\sum\limits_{i=1}^{k} = 1$；
- $\forall j = 1, 2, \ldots, n$，有 $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i (p_i)_j = x_j$ 。

构造任意一组方案，或者报告无解。

数据范围

- $1 \le n \le 500$;
- $1 \le x_i \le n$;
- n, x_i 都是整数。

解题过程

在下面的描述中，我们把每个排列同样视作一个 n 维空间的向量。

首先我们应该考虑怎样的序列是有解的。

不难发现一个必要条件：

> 首先有 $\sum\limits_{i=1}^{n} = \frac{n(n+1)}{2}$。
> 还有：把 x 从小到大排序，得到 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ 满足 $y_i \le y_{i+1}$。
> 那么，对于任意的 $j = 1, 2, \ldots, n$，都要有 $\frac{j(j+1)}{2} \le \sum\limits_{i=1}^{j} y_i$。

假如上面的某个不等式（除了 $j = n$ 的平凡情况）取到了等号，会发生什么？

不失一般性地，我们假设是向量的前 j 维取到了等号（最小值），那么容易发现：我们构造的每个排列 p，对于 $i \le j$ 一定有 $p_i \le j$，否则有 $p_i > j$。

这意味着问题被划分为了两个 **几乎独立** 的部分。在这种情况下，如果我们能分别求出前 j 维的解（使用
j 个排列）和后 $n-j$ 维的解（使用 $n-j$ 个排列），就可以合并这两组解，得到一个最多 $n-1$ 个排列的解。

具体地，设我们在两部分分别得到了解 $\{a_i \mathbf{u}_i\}, i \le n$ 和解 $\{b_j \mathbf{v}_j\}, j \le m$，我们要解决的是如下问题：

> 构造一个 $n \times m$ 的实数矩阵 $c_{i,j}$，使得：
>
> - $c_{i,j} \ge 0$;
> - $\forall i = 1, 2, \ldots, n, \sum\limits_{j=1}^{m} c_{i,j} = a_i$；

> - $\forall j=1,2,\ldots,m,\sum_{i=1}^{n} c_{i,j}=b_j$。
>
> 然后，我们构造解 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{i,j}(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_j)$。这里，$(\mathbf{u}_i\mathbf{v}_j)$ 表示两个排列的拼接。

我们要做的就是使得上面这个实数矩阵非 0 的元素不超过 $n+m-1$ 个。这是一个经典问题，容易在 $O((n+m)\log(n+m))$ 的时间复杂度内解决。

可以发现，某个不等式取到等号是一个很有效的性质。

对于一般情况，我们可以任选一个排列 p 及其对应的系数 λ，考虑一个新目标 $\mathbf{y}=\frac{\mathbf{x}-\lambda\mathbf{p}}{1-\lambda}$。可以证明：$\exists\lambda\in[0,1)$ 使得 $\mathbf{y}$ 满足上文所述充分条件，且至少存在一个非平凡不等式取到了等号。

> 证明：
>
> 坐标关于 λ 的变化是连续的，因此只需证明 λ 趋近 1 时至少能取得一个 $\frac{j(j+1)}{2}\geq\sum_{i=1}^{j} y_i$。
>
> 然而，除非 $\mathbf{x}=\mathbf{p}$，$\mathbf{y}$ 至少有一维是负的；而 $\mathbf{x}=\mathbf{p}$ 时我们就直接得到了一组解。

寻找 λ 的过程可以用二分实现。

现在我们使用 1 个排列，把问题转化为了上文带有特殊性质的问题。而我们知道，上文问题可以用不超过 $j+(n-j)-1=n-1$ 个向量构造。因此，我们就构造了至多 n 个排列的解。

时间复杂度可以做到 $O(n^3)$。在实现时，需要注意可能的精度问题。

参考资料

[比赛题解]

[凸组合_百度百科]