

Qoj970 Best Subsequence

题目大意

给定长度为 m 的序列 A , q 次询问, 每次询问给定 l, r, k , 要求从 $A[l, r]$ 中选出一个长度恰好为 k 的子序列 C , 使得 C 相邻两项 (包括头尾) 之和的最大值最小, 你只需输出这个最小值即可。

数据范围

$1 \leq n, q \leq 10^5, 0 \leq A_i \leq 10^9$ 。

解题过程

我们二分答案 Ans , 则可以发现 $\leq \frac{Ans}{2}$ 的全都会选上, 对于相邻的两个选出的数, 我们求出 A 序列中位置位于它们之间的最小值, 若这个值加上它们两的最大值 $\leq Ans$, 则这个值也可以选上, 最后我们只需看选出的数的个数是否 $\geq k$ 即可。

考虑如何用数据结构优化这个过程, 我们从小到大枚举 A 序列中的数, 每次加入一个数时, 假设它在位置 x , 我们找到已经加入的数中它的前驱 L 和后继 R , 然后找到 (L, x) 中的最小值, 假设在位置 y , 那么当 $Ans \geq x + y, 2y$ 时, y 就会产生贡献, (x, R) 同理。

查询时, 我们先找到区间 $[l, r]$ 中 $\leq \frac{Ans}{2}$ 最前的和最后的位置 L, R , 然后用主席树查询 $[L, R]$ 中对 Ans 来说合法的数的个数, 再用 RMQ 查询 $[L, R]$ 之外的数的最小值, 看看这个数能否加入即可, 设 $n, \max A$ 同阶, 则时间复杂度 $\mathcal{O}(n \log n + q \log^2 n)$ 。

实际上这个做法可以进一步优化, 对于 $[L, R]$ 外的那些 y , 我们可以先认为它产生了贡献, 在这个情况下找到选出的数的个数 $\geq k - 1$ 的最小的 Ans 。

此时同样找到 L, R , 那么由于 $[l, L)$ 和 $(R, r]$ 中分别有 ≤ 1 个被误认为产生贡献的 y , 所以目前真实的选出的数的个数是 $\geq k - 3$ 的。

考虑每次让选出的数的个数 $+1$, 这个过程只会进行 ≤ 3 次。

具体地, 有两种情况会让选出的数的个数 $+1$:

- $[L, R]$ 中多选一个数, 我们求出每个数第一次被选中时 Ans 的最小值 t_i , 则相当于求这个区间内最小的大于目前 Ans 的 t 。
- $[l, L), (R, r]$ 中多选一个数, 此时只可能是因为 $\leq \frac{Ans}{2}$ 被选上, 相当于查询区间内最小的大于目前 $\frac{Ans}{2}$ 的 A 。

都可以用主席树维护, 这样我们就在 $\mathcal{O}(n \log n + q \log n)$ 的时间复杂度内解决了这题。

参考资料

无。