合唱队形

MyeeYe

实际讲者：TBA

2025 年 9 月

目录

引言

其实 NOIp 和 UNR 都出过名叫“合唱队形”的经典题！（都是上古题）

引言

其实 NOIp 和 UNR 都出过名叫“合唱队形”的经典题！（都是上古题）
本题一开始是 UNR 同名题读错得到的，后来发现读错后的题可做并且可以加强就出出来了（捂脸）。

引言

其实 NOIp 和 UNR 都出过名叫“合唱队形”的经典题！（都是上古题）
本题一开始是 UNR 同名题读错得到的，后来发现读错后的题可做并且可以加强就出出来了（捂脸）。
同时也是本场的防 AK 题，但是不知道有没有防住啊！

题意简述

目前有 n 个学生和 m 首歌，一开始所有人都不会唱歌。
当连续 m 个学生依次会唱编号从小到大的 m 首歌时称达成一合唱队形。
你希望每次从列表 Φ 中抽出一对 (r, s)，教 r 号学生 s 号歌。
求期望多少次后有至少 p 个合唱队形，对 998244353 取模。对所有 p 求解，不可能请输出 -1。
$1 \le m \le n \le 80$，$1 \le |\Phi| \le 15000$，15s/1GB。

题解

关于这种求解随机过程停时的问题，一般有三种解法：概率生成函数，min-max 容斥，鞅的停时定理。

题解

关于这种求解随机过程停时的问题，一般有三种解法：概率生成函数，min-max 容斥，鞅的停时定理。
我们的官方做法采用的是基于概率生成函数的做法。

题解

关于这种求解随机过程停时的问题，一般有三种解法：概率生成函数，min-max 容斥，鞅的停时定理。
我们的官方做法采用的是基于概率生成函数的做法。
~~可以算是我的集训队论文题了（大雾）~~。

摘 要

对随机过程的停时信息的刻画是算法竞赛中一类常见问题。经过归纳总结，本文给出了使用生成函数刻画与解决这类问题的一些常用工具与方法，包括 Laplace 变换、让随机过程不停时等。

题解

关于这种求解随机过程停时的问题，一般有三种解法：概率生成函数，min-max 容斥，鞅的停时定理。
我们的官方做法采用的是基于概率生成函数的做法。
~~可以算是我的集训队论文题了（大雾）~~。

摘 要

对随机过程的停时信息的刻画是算法竞赛中一类常见问题。经过归纳总结，本文给出了使用生成函数刻画与解决这类问题的一些常用工具与方法，包括 Laplace 变换、让随机过程不停时等。

事实上这也是一个比较常见的 trick！

显然总共有不超过 $n-m+1$ 种可能合唱方案，并且两两无关。

题解

基本观察

显然总共有不超过 $n-m+1$ 种可能合唱方案，并且两两无关。假设对从 i 号人开始的合唱方案，其的第 j 个音乐对应了 $c_{i,j}$ 个重复的课程。并设总课程数为 $S=|\Phi|$。

显然总共有不超过 $n-m+1$ 种可能合唱方案，并且两两无关。
假设对从 i 号人开始的合唱方案，其的第 j 个音乐对应了 $c_{i,j}$ 个重复的课程。并设总课程数为 $S=|\Phi|$。
那么我们可以考虑刻画，过了若干时间后，“某个合唱方案内部，其各个音乐都被至少教一遍”的概率。

题解

EGF 刻画

注意到 EGF 的乘法可以用来分配“时间标号”的组合，因此我们考虑用 EGF 的形式来刻画其概率，作为其 PGF。具体地，我们设 $z^n/n!$ 的系数为 n 个时刻后目标达成的概率。

题解

EGF 刻画

注意到 EGF 的乘法可以用来分配“时间标号”的组合，因此我们考虑用 EGF 的形式来刻画其概率，作为其 PGF。具体地，我们设 $z^n/n!$ 的系数为 n 个时刻后目标达成的概率。

那么我们就有 i 号人开始的合唱方案其成功的 PGF 为

$$F_i(z) = \prod_j (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

题解

EGF 刻画

注意到 EGF 的乘法可以用来分配“时间标号”的组合，因此我们考虑用 EGF 的形式来刻画其概率，作为其 PGF。具体地，我们设 $z^n/n!$ 的系数为 n 个时刻后目标达成的概率。

那么我们就有 i 号人开始的合唱方案其成功的 PGF 为

$$F_i(z) = \prod_j (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

其存在音乐没有被教的 PGF 为

$$G_i(z) = \exp(\sum_j c_{i,j}z/S) - \prod_j (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

题解

EGF 刻画

注意到 EGF 的乘法可以用来分配“时间标号”的组合，因此我们考虑用 EGF 的形式来刻画其概率，作为其 PGF。具体地，我们设 $z^n/n!$ 的系数为 n 个时刻后目标达成的概率。

那么我们就有 i 号人开始的合唱方案其成功的 PGF 为

$$F_i(z) = \prod_j (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

其存在音乐没有被教的 PGF 为

$$G_i(z) = \exp(\sum_j c_{i,j}z/S) - \prod_j (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

其恰好只有第 k 个音乐没有被教的 PGF 为

$$H_{i,k}(z) = \prod_{j \neq k} (\exp(c_{i,j}z/S) - 1)$$

题解

EGF 刻画

我们考虑枚举最后一步是以教了哪个人那首歌来结尾的。对于已知最后一步是第 i 种合唱方案的第 k 首歌，并且最后一共有 p 种合唱方案的情况，我们有前面的步骤对应的 PGF 为

$$P_{i,k}(z) = [u^{p-1}]H_{i,k}(z)\prod_{j\neq i}(uF_j(z) + G_j(z))\exp((1 - \sum_{i,j} c_{i,j}/S)z)$$

题解

EGF 刻画

我们考虑枚举最后一步是以教了哪个人那首歌来结尾的。对于已知最后一步是第 i 种合唱方案的第 k 首歌，并且最后一共有 p 种合唱方案的情况，我们有前面的步骤对应的 PGF 为

$$P_{i,k}(z) = [u^{p-1}]H_{i,k}(z)\prod_{j\neq i}(uF_j(z) + G_j(z))\exp((1 - \sum_{i,j} c_{i,j}/S)z)$$

那么得到这个东西后，我们如何刻画答案？

我们考虑枚举最后一步是以教了哪个人那首歌来结尾的。对于已知最后一步是第 i 种合唱方案的第 k 首歌，并且最后一共有 p 种合唱方案的情况，我们有前面的步骤对应的 PGF 为

$$P_{i,k}(z) = [u^{p-1}]H_{i,k}(z)\prod_{j\neq i}(uF_j(z) + G_j(z))\exp((1 - \sum_{i,j} c_{i,j}/S)z)$$

那么得到这个东西后，我们如何刻画答案？
注意到答案对应的形式为

$$1 + \sum_j j[\frac{z^j}{j!}]\sum_{i,k}\frac{c_{i,k}}{S}P_{i,k}(z)$$

题解

EGF 刻画

我们考虑枚举最后一步是以教了哪个人那首歌来结尾的。对于已知最后一步是第 i 种合唱方案的第 k 首歌，并且最后一共有 p 种合唱方案的情况，我们有前面的步骤对应的 PGF 为

$$P_{i,k}(z) = [u^{p-1}]H_{i,k}(z)\prod_{j\neq i}(uF_j(z) + G_j(z))\exp((1 - \sum_{i,j} c_{i,j}/S)z)$$

那么得到这个东西后，我们如何刻画答案？
注意到答案对应的形式为

$$1 + \sum_j j[\frac{z^j}{j!}]\sum_{i,k}\frac{c_{i,k}}{S}P_{i,k}(z)$$

而 $\sum_{i,k}\frac{c_{i,k}}{S}P_{i,k}(z)$ 本身对应的形式又可以刻画为若干个 $e^{az/S}$ 的线性组合，因此我们只用求出这个线性组合，然后再把每个 $e^{az/S}$ 的贡献统计进答案即可。

于是取 $s = \exp(z/S)$，我们改写得

$$F_i = \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$G_i = s^{\sum_j c_{i,j}} - \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$H_i = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} H_{i,k} = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} \prod_{j \neq k} (s^{c_{i,j}} - 1)$$

题解

换元求解

于是取 $s = \exp(z/S)$，我们改写得

$$F_i = \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$G_i = s^{\sum_j c_{i,j}} - \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$H_i = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} H_{i,k} = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} \prod_{j \neq k} (s^{c_{i,j}} - 1)$$

而这些都可以使用多项式分治卷积或者 $\ln / \exp$ 做到 $O(S \log^2 S)$ 或者 $O(S \log S)$，具体细节按下不表。

于是取 $s = \exp(z/S)$，我们改写得

$$F_i = \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$G_i = s^{\sum_j c_{i,j}} - \prod_j (s^{c_{i,j}} - 1)$$

$$H_i = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} H_{i,k} = \sum_k \frac{c_{i,k}}{S} \prod_{j \neq k} (s^{c_{i,j}} - 1)$$

而这些都可以使用多项式分治卷积或者 $\ln / \exp$ 做到 $O(S \log^2 S)$ 或者 $O(S \log S)$，具体细节按下不表。

通过换元，我们最后只用对每个 p 求出

$$s^{S-\sum_{i,j} c_{i,j}}[u^{p-1}t^1]\prod_i (uF_i + G_i + tH_i)$$

即可得到答案。换句话说，我们只需要求解 $[t^1]\prod_i (uF_i + G_i + tH_i)$ 作为二元 GF 的各项系数。

通过换元，我们最后只用对每个 p 求出

$$s^{S-\sum_{i,j} c_{i,j}}[u^{p-1}t^1]\prod_i(uF_i+G_i+tH_i)$$

即可得到答案。换句话说，我们只需要求解
$[t^1]\prod_i(uF_i+G_i+tH_i)$ 作为二元 GF 的各项系数。
容易证明此处直接使用分治卷积的复杂度是 $O(nS\log(nS))$ 的。
从而得以通过此题。

总结

题出的好！难度适中，覆盖知识点广，题目又着切合实际的背景，解法比较自然。给出题人点赞！